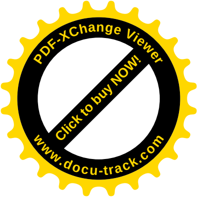
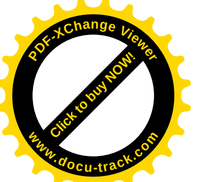

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

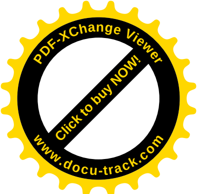

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

SOMMAIRE



CHAPITRE II

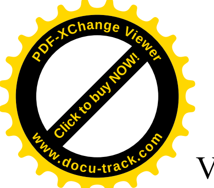
CINEMATIQUE





CHAPITRE III

DYNAMIQUE D'UNE PARTICULE



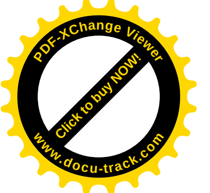
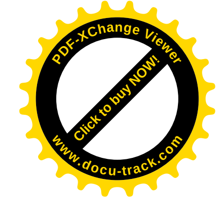


CHAPITRE IV

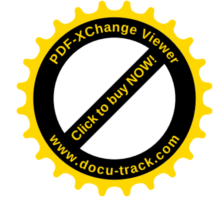
TRAVAIL ET ÉNERGIE

CHAPITRE V

SYSTEMES A PLUSIEURS PARTICULES


PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com





CHAPITRE I

VECTEURS

ET

ANALYSE DIMENSIONNELLE

I. GRANDEUR SCALAIRE- GRANDEUR VECTORIELLE

En physique, on utilise deux types de grandeurs : les **grandeurs scalaires** et les **grandeurs vectorielles**. Les **grandeurs physiques scalaires** sont entièrement définies par un nombre et une unité appropriée. On peut citer comme exemples : la masse *m* d'un corps, la longueur *l* d'un objet, l'énergie E d'un système, la charge électrique q… Une **grandeur physique vectorielle** est une quantité spécifiée par un nombre et une unité appropriée plus une direction et un sens. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur ayant la même direction, le même sens et un module mesuré en choisissant une unité graphique correspondante, c'est-à-dire **l'échelle**. On peut citer comme grandeurs vectorielles la vitesse $\vec{v}$ d'un mobile, le poids $\vec{P}$ d'un corps, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$…

Exemple : Le poids d'un corps de masse 1kg peut être représenté par un vecteur ayant les caractéristiques suivantes :

- origine : le centre de gravité de l'objet ;
- direction : verticale ;
- sens : du haut vers le bas ;
- module : le poids étant de 9,8 N, si on choisit une échelle qui fait correspondre 1cm à 2N ($1\text{cm} \rightarrow 2\text{N}$) le vecteur aura une longueur de 4.9 cm.

II- VECTEUR

II.1. Vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ (figure I.1) est un segment orienté qui possède:

- une origine M ;

- un module $\left|\overrightarrow{MN}\right|$: la longueur du segment MN ;
- une direction : celle de la droite (MN) ;
- un sens : de M vers N.

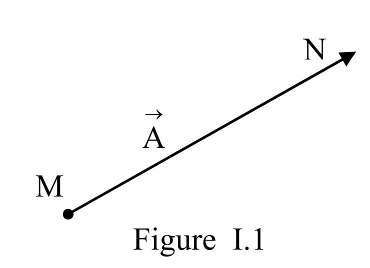


Figure I.1

Remarque : On peut désigner un vecteur par une seule lettre, par exemple : $\vec{A}=\overrightarrow{MN}$.

II.2. Propriétés

- Un vecteur est dit « **vecteur libre** » s'il est défini par sa direction son sens et sa longueur sans fixer son point d'application.

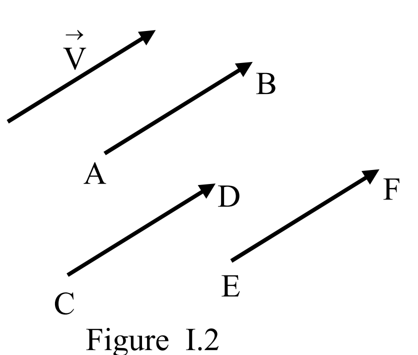


Figure I.2

Exemple: Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants du vecteur libre $\vec{V}$ (figure I.2).

- Un vecteur est nommé "**vecteur glissant**" si l'on impose sa droite support (Δ) sans fixer son point d'application.

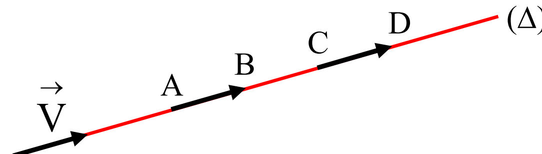


Figure I.3

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur glissant $\vec{V}$ (figure I.3).

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé "**vecteur lié**" si l'on fixe son origine A (figure I.4).

(Δ)

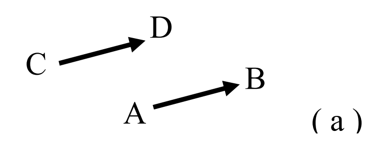


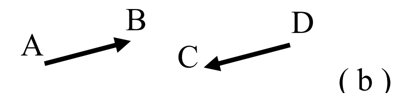
Figure I.4

- Deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origines différentes sont:

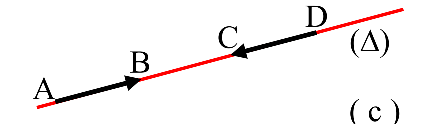
  ✓ **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même module (figure I.5 (a)) ;

  ✓ **opposés** s'ils ont même direction, même module mais des sens opposés (figure I.5 (b)); ils sont dits "**directement opposés**" s'ils ont même support (Δ) (figure I.5 (c)).

C D
A B
(a)

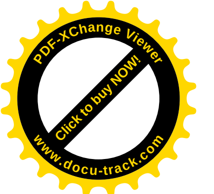


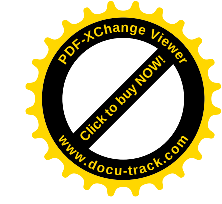
(b)



(c)

Figure I.5







II.3. Intensité – Module

Une unité de longueur ayant été choisie sur la droite (Δ), support du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on appelle **module** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, désigné par $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, la longueur AB. Si $\overrightarrow{AB}$ représente une grandeur physique $\vec{F}$, la mesure, notée $\left|\vec{F}\right|$, de cette grandeur avec l'unité adéquate est son intensité.

Cas particulier : si $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$, le vecteur est dit **unitaire**. Il peut être utilisé pour mesurer tout vecteur qui lui est parallèle.

Exemple : Sur la figure I.6, $\vec{V}$ étant parallèle à $\vec{u}$, on peut définir $\vec{u}$ comme vecteur unitaire, on aura alors : $\vec{V} = 3\vec{u}$.

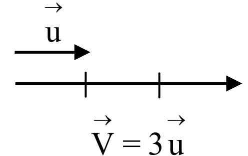


Figure I.6

II.4. Mesure algébrique

- On appelle **axe** (Δ) une droite support orientée (Δ) (figure I.7).
- La **mesure algébrique**, notée $\overline{AB}$, d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de longueur AB est définie par :
  - $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ si $\overrightarrow{AB}$ a pour sens le sens positif de l'axe orienté.
  - $\overline{AB} = -\left|\overrightarrow{AB}\right|$ si $\overrightarrow{AB}$ a pour sens le sens négatif de l'axe orienté.

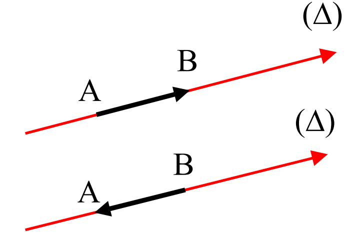


Figure I.7

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **opposés** si leurs supports sont parallèles et leurs mesures algébriques comptées sur le même axe (Δ) sont opposées.

Cas particulier : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont deux vecteurs opposés.

- Soit un axe portant un point A et un point O que l'on choisit pour origine (figure I.8). L'abscisse du point A est la **mesure algébrique** du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

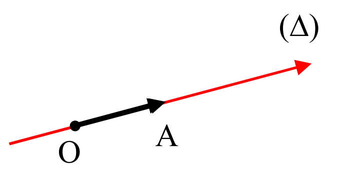
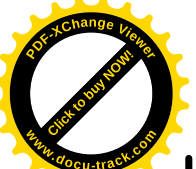
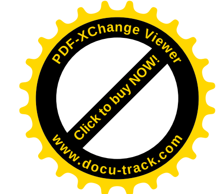


Figure I.8





III. OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES VECTEURS

III.1. Addition vectorielle

La **somme** de deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$, notée $\vec{U} + \vec{V}$, est un vecteur libre $\vec{W}$, obtenu par la "règle du parallélogramme"(figure I.9).

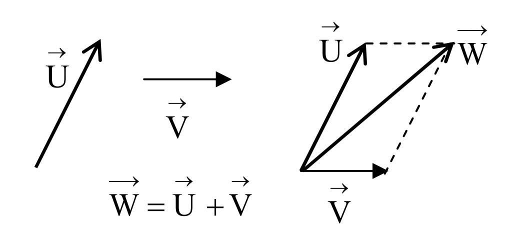
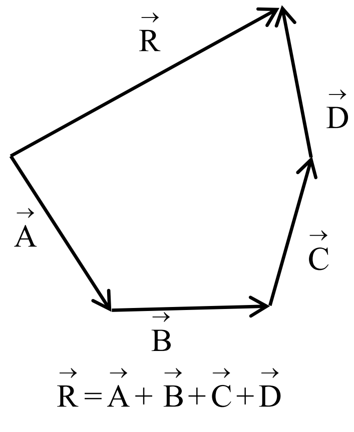


Figure I.9

Lorsque le nombre de vecteurs à additionner est supérieur à deux on applique la méthode géométrique qui consiste à les placer bout à bout comme indiqué sur la figure I.10.



$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

Figure I.10

Propriétés :

- Commutativité : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$

III.2. Soustraction vectorielle

- Etant donné deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, la différence $\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$ peut s'écrire : $\vec{W} = \vec{V} + (-\vec{U})$. On peut alors appliquer la règle du parallélogramme (figure I.11).
- **Autre méthode** : Dans l'illustration de la figure I.12, $\overrightarrow{W}$ est construit de façon que M soit son milieu et celui de AB.

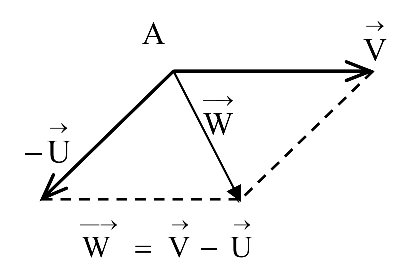


Figure I.11

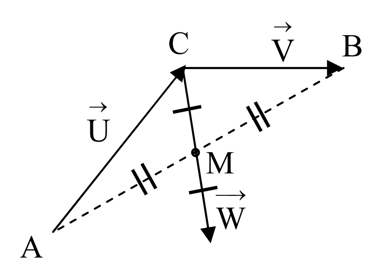


Figure I.12

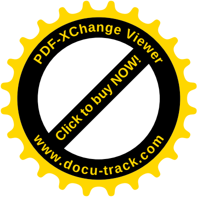
III.3. Relation de Chasles

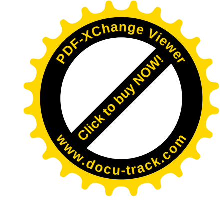
Etant donné trois points A,B et C,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Cas particulier : Si les trois points A, B et C sont alignés sur un axe, alors nous obtenons la relation de Chasles pour les mesures algébriques :

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$







III.4. Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire α est un vecteur, noté $\alpha\vec{V}$ (figure I.13), tel que:

- sa **direction** est celle de $\vec{V}$;
- son **sens** : celui de $\vec{V}$ si $\alpha > 0$, celui de $-\vec{V}$ si $\alpha < 0$;
- son module est égal au produit de celui de $\vec{V}$ par la valeur absolue de α : $\left|\alpha\vec{V}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{V}\right|$.

Figure I.13

Propriétés :

La multiplication d'un vecteur par un scalaire vérifie les propriétés suivantes:

- Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\alpha(\vec{U}+\vec{V}) = \alpha\vec{U} + \alpha\vec{V}$;
- Distributivité par rapport à l'addition des scalaires : $(\alpha+\beta)\vec{U} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{U}$;
- Associativité : $\alpha(\beta\vec{U}) = (\alpha\beta)\vec{U}$;

IV. SYSTEME DE COORDONNEES CARTESIENNES

IV.1. Système cartésien orthonormé bidimensionnel

Ce système est utilisé pour repérer un point dans un plan. Il est composé de deux axes orthogonaux du plan, Ox et Oy, munis des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orientés positivement (figure I.14).

La position d'un point M du plan est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Soient M_x et M_y les projections de M sur les axes Ox et Oy, respectivement. Remarquons que, par construction :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$$

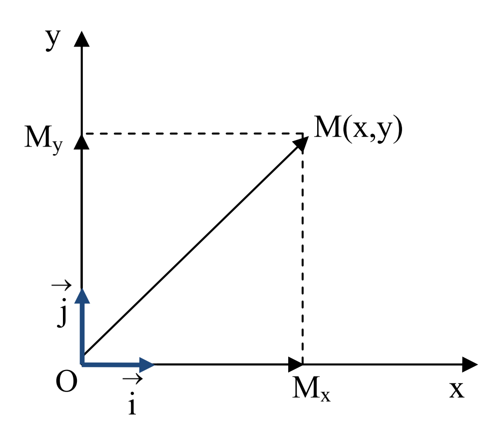


Figure I.14




Si $$\begin{cases} \overrightarrow{OM_x} = x\,\vec{i} \\ \overrightarrow{OM_y} = y\,\vec{j} \end{cases}$$

alors $$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

- Les grandeurs **algébriques** x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le système (O, x, y);

- Les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base orthonormée (leur module est égal à 1 et ils sont perpendiculaires entre eux).

IV.2. Système cartésien orthonormé tridimensionnel

Ce système est utilisé pour repérer un point M quelconque de l'espace (figure I.15). Il est composé de trois axes, Ox, Oy et Oz, munis des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ orientés positivement.

La position d'un point M de l'espace est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Soient M_x, M_y et M_z les projections de M sur les axes Ox, Oy et Oz, respectivement. M′ étant sa projection sur le plan (O, x, y), remarquons que, par construction : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_z} + \overrightarrow{OM'}$.

Remarquons également que, par construction :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$$

Soit $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$

Si $$\begin{cases} \overrightarrow{OM_x} = x\,\vec{i} \\ \overrightarrow{OM_y} = y\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OM_z} = z\,\vec{k} \end{cases}$$

Alors $$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

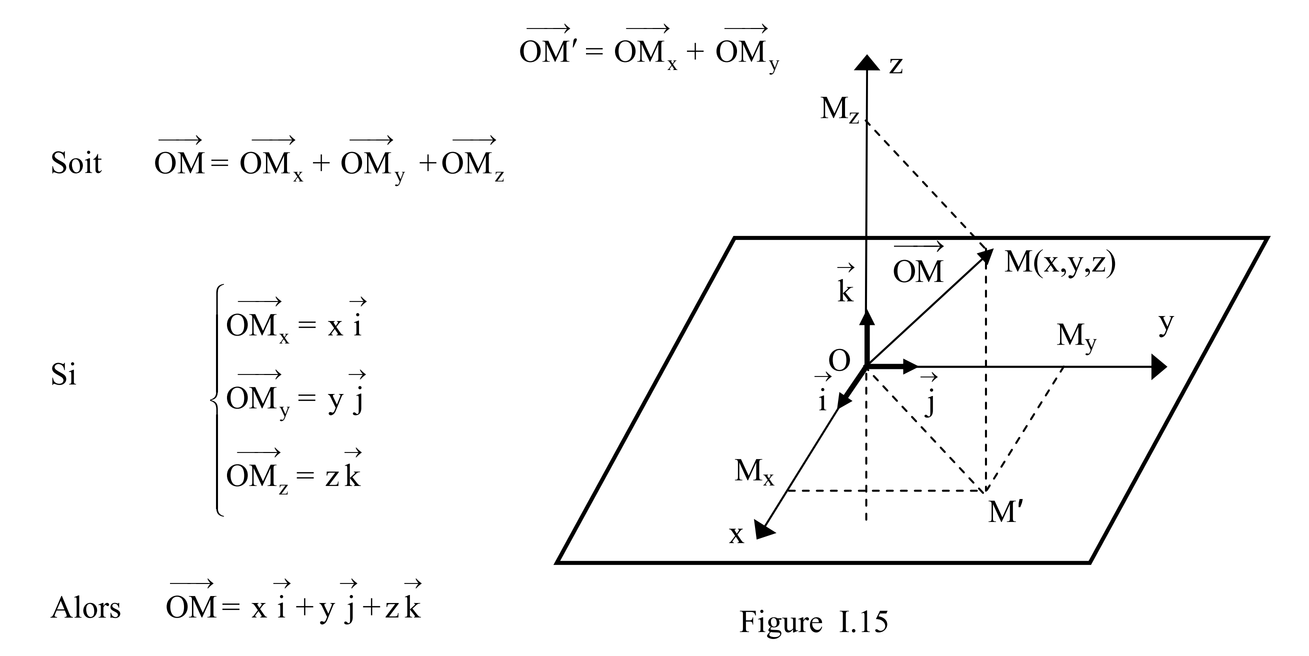
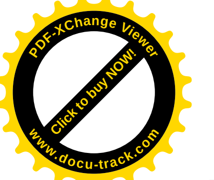


Figure I.15

- Les grandeurs **algébriques** x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le système (O, x, y, z).





• Les vecteurs unitaires $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forment une base orthonormée.

IV.3. Composantes d'un vecteur

Soit $\vec{A}$ un vecteur, $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ et $\vec{A}_z$ ses projections directes sur les axes d'un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) (figure I.16).

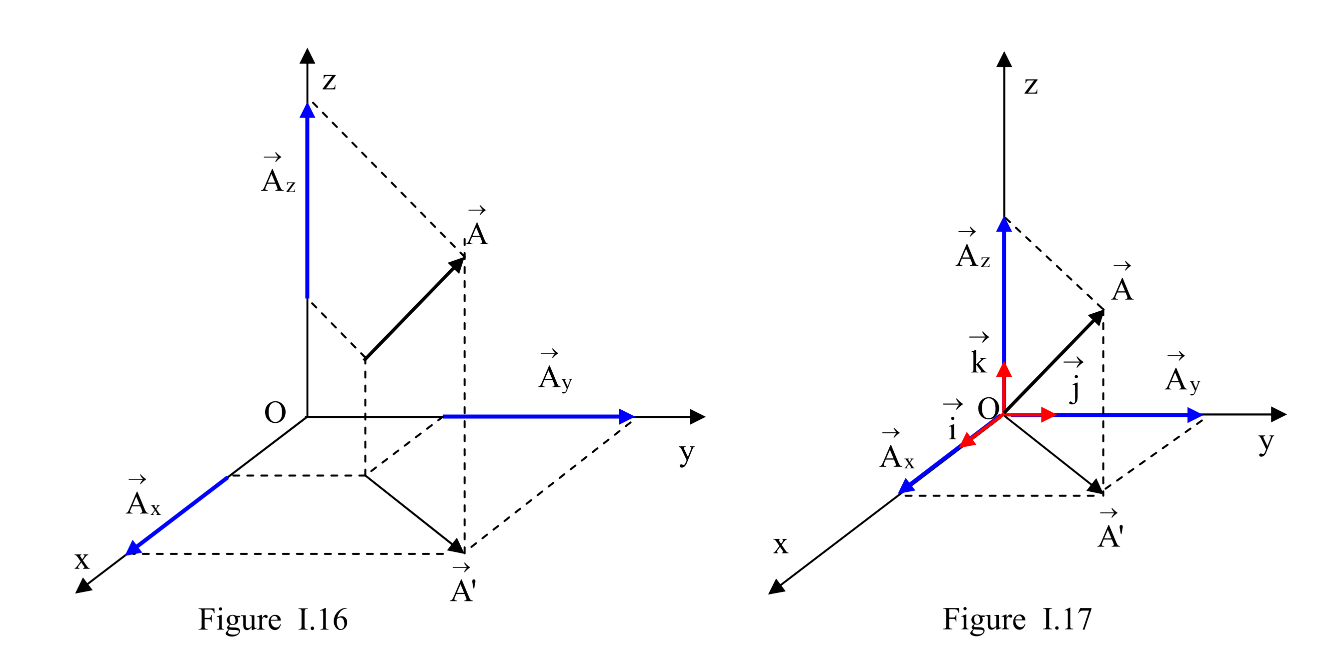


Figure I.16 Figure I.17

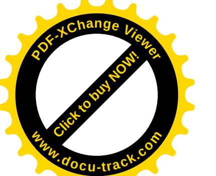
Ramenons $\vec{A}$ et ses projections à l'origine O (figure I.17). On constatera alors que :

$$\begin{matrix} \vec{A} = \vec{A'} + \vec{A}_z \\ \vec{A'} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \end{matrix} \Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \qquad (I.1)$$

si, de plus : $\begin{cases} \vec{A}_x = A_x \, \vec{i} \\ \vec{A}_y = A_y \, \vec{j} \\ \vec{A}_z = A_z \, \vec{k} \end{cases}$

alors :

$$\vec{A} = A_x \, \vec{i} + A_y \, \vec{j} + A_z \, \vec{k} \qquad (I.2)$$





• A_x, A_y et A_z sont les **composantes** du vecteur $\vec{A}$; ce sont ses **projections algébriques** sur les axes des coordonnées.

• Notations : $\vec{A}\left(A_x, A_y, A_z\right)$ ou $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

• $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ et $\vec{A}_z$ sont ses **projections géométriques** sur les axes des coordonnées.

• Le module de $\vec{A}$ est donné par :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (I.3)$$

Remarques :

a) Etant donné les points $M(x_M, y_M, z_M)$ et $N(x_N, y_N, z_N)$ dans (O, x, y, z)

- les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$ s'obtiennent en écrivant :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_N - x_M)\,\vec{i} + (y_N - y_M)\,\vec{j} + (z_N - z_M)\,\vec{k} \qquad (I.4)$$

Soit $\overrightarrow{MN}\left((x_N - x_M), (y_N - y_M), (z_N - z_M)\right)$

- le module de $\overrightarrow{MN}$ est défini par :

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2} \qquad (I.5)$$

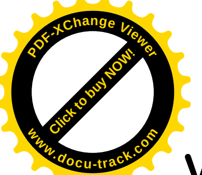
- le milieu I de MN a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_M + x_N}{2}, \frac{y_M + y_N}{2}, \frac{z_M + z_N}{2}\right)$$

b) Etant donné les vecteurs $\vec{A}\left(A_x, A_y, A_z\right)$ et $\vec{B}\left(B_x, B_y, B_z\right)$,

- Si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, il aura pour composantes $\vec{C}\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \\ C_z = A_z + B_z \end{cases}$

- Si $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$, il aura pour composantes $\vec{D}\begin{cases} D_x = A_x - B_x \\ D_y = A_y - B_y \\ D_z = A_z - B_z \end{cases}$




V. PRODUIT SCALAIRE

V.1. Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U}\cdot\vec{V}$, est le **scalaire** défini par :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \left|\vec{U}\right|\cdot\left|\vec{V}\right|\cdot\cos\theta \qquad (I.6)$$

où θ est l'angle $\left(\vec{U},\vec{V}\right)$.

Le produit scalaire est donc positif pour θ aigu, négatif pour θ obtus.

V.2. Forme géométrique

Par définition du produit scalaire $\vec{U}\cdot\vec{V}$:

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \left|\vec{U}\right|\cdot\underbrace{\left|\vec{V}\right|\cos\theta}_{\bar{V}_U} = \left|\vec{U}\right|\cdot\bar{V}_U$$

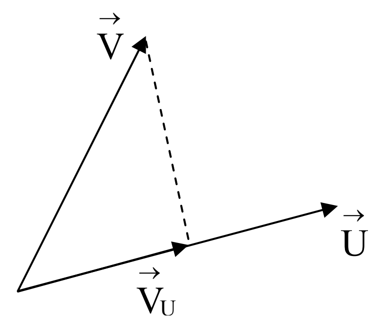


Figure I.18

$\bar{V}_U$ est la projection algébrique de $\vec{V}$ sur $\vec{U}$ (figure I.18)

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur sa droite support.

V.3. Forme analytique

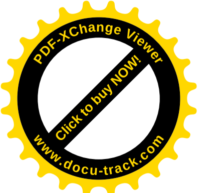
En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le **scalaire** défini par la relation :

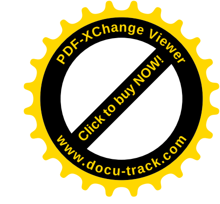
$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \left(U_x\,\vec{i} + U_y\,\vec{j} + U_z\,\vec{k}\right)\cdot\left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z \qquad (I.7)$$

car : $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$





V.4. Propriétés

- Commutativité : $\vec{U}\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{U}$;
- Distributivité par rapport à l'addition : $\left(\vec{U}+\vec{V}\right)\cdot\vec{W} = \vec{U}\cdot\vec{W}+\vec{V}\cdot\vec{W}$;
- Linéarité : $\left(\alpha\vec{U}\right)\cdot\left(\beta\vec{V}\right)=(\alpha\beta)\left(\vec{U}\cdot\vec{V}\right)$ $(\alpha$ et β étant des scalaires$)$.

V.5. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

$$\vec{U}\perp\vec{V} \Rightarrow \cos\left(\vec{U},\vec{V}\right)=0 \Rightarrow \vec{U}\cdot\vec{V}=0$$

$$\vec{U}\perp\vec{V} \Leftrightarrow U_xV_x+U_yV_y+U_zV_z=0 \qquad (\text{I.8})$$

V.6. Applications du produit scalaire en géométrie

- Détermination du cosinus de l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}\left(U_x,U_y,U_z\right)$ et $\vec{V}\left(V_x,V_y,V_z\right)$.

  Par application du produit scalaire :

$$\cos\left(\vec{U},\vec{V}\right)=\frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\left|\vec{U}\right|\cdot\left|\vec{V}\right|}=\frac{U_xV_x+U_yV_y+U_zV_z}{\sqrt{U_x^2+U_y^2+U_z^2}\cdot\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}} \qquad (\text{I.9})$$

- Relation métrique dans un triangle quelconque (figure I.19)

  Nous avons $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

  d'où

$$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

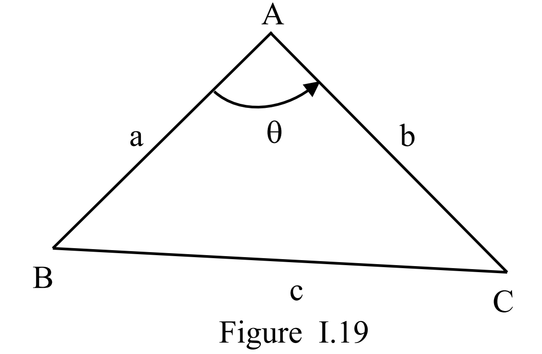


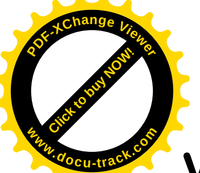
Figure I.19

Soit

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\theta \qquad (\text{I.10})$$

Remarque : dans le cas d'un triangle rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore :

$$c^2=a^2+b^2.$$





VI. PRODUIT VECTORIEL

VI.1. Définition

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un **vecteur** $\overrightarrow{W}$, noté $\overrightarrow{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$:

- de direction telle que: $\overrightarrow{W} \perp \vec{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \vec{V}$

  ($\overrightarrow{W}$ est perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$) (figure I.20).

- de sens tel que le trièdre $\left(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W}\right)$ soit direct.

- de module :

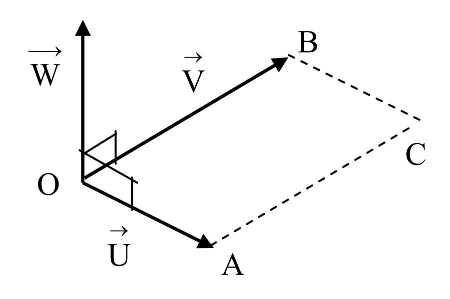


Figure 1.20

$$\left|\overrightarrow{W}\right| = \left|\vec{U}\right| . \left|\vec{V}\right| \sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right). \qquad \text{(I.11)}$$

$\left|\overrightarrow{W}\right|$ mesure l'aire du parallélogramme OABC construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. En effet, H étant la projection de A sur OB, on a

$$AH = OA \sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = \left|\vec{U}\right| . \sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right) \qquad \text{(I.12)}$$

et l'aire du parallélogramme devient

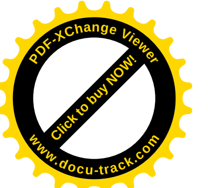
$$OB \times AH = \left|\vec{U}\right| \cdot \left|\vec{V}\right| \sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = \left|\overrightarrow{W}\right| \qquad \text{(I.13)}$$

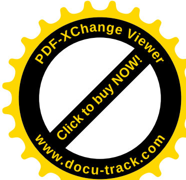
Remarque :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;\; ; \;\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;\; ; \;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

VI.2. Forme analytique

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le **vecteur** défini par la relation:





$$\overrightarrow{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \underbrace{\left(U_y V_z - U_z V_y\right)}_{W_x} \vec{i} + \underbrace{\left(U_z V_x - U_x V_z\right)}_{W_y} \vec{j} + \underbrace{\left(U_x V_y - U_y V_x\right)}_{W_z} \vec{k} \qquad \text{(I.14)}$$

Pour obtenir les composantes du produit vectoriel on effectue la différence classique des "produits en croix" des composantes pour W_x et on en déduit W_y et W_z successivement en effectuant une permutation circulaire sur les indices : $x \to y \to z \to x$.

VI.3. Propriétés

- Non commutativité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$;
- Distributivité par rapport à l'addition $\left(\vec{U} + \vec{V}\right) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \vec{W}$;
- Linéarité : $\left(\alpha \vec{U}\right) \wedge \left(\beta \vec{V}\right) = (\alpha\beta) \cdot \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right)$ $(\alpha$ et β étant des scalaires$)$.

VI.4. Condition pour que deux vecteurs soient parallèles

$$\vec{U} // \vec{V} \Rightarrow \left|\vec{U}\right| \cdot \left|\vec{V}\right| \sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = 0 \qquad \text{(I.15)}$$

soit

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = 0 \qquad \text{(I.16)}$$

VI.5. Applications du produit vectoriel en géométrie

- Sachant que l'aire du parallélogramme (ABCD) est donnée par $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right|$;

  l'aire du triangle (ABC) est par conséquent égale à $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right|$;
- Equation cartésienne d'une droite (D) passant par deux points A et B d'un plan xOy :

  Si un point M $\in$ (D) alors $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$.

VI.6. Applications du produit vectoriel en physique

- Par définition, le **moment d'un vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par rapport à un point O** (figure I.21) est :

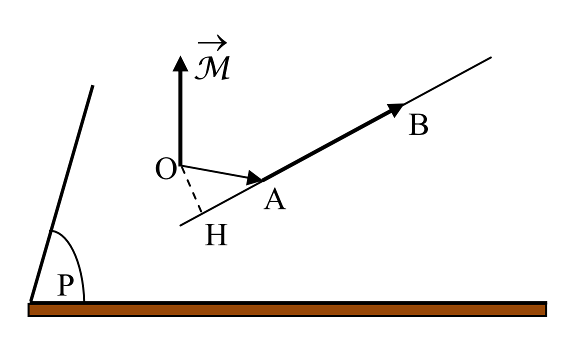


Figure I.21

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{AB}/O)} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (I.17)$$

Son module est

$$\left|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{AB}/O)}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})$$

$$= \underbrace{\left|\overrightarrow{OA}\right| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})}_{OH} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Soit

$$\left|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{AB}/O)}\right| = OH \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \qquad (I.18)$$

VI.7. Orientation de l'espace

- "Règles des trois doigts" de la main droite (figure I.22).

On associe les vecteurs de base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ aux axes d'un trièdre rectangle formé par les trois doigts de la main droite. Pour former un **trièdre direct**, on oriente

- $\vec{i}$ dans la direction du pouce.
- $\vec{j}$ dans la direction de l'index.
- $\vec{k}$ dans la direction du majeur.

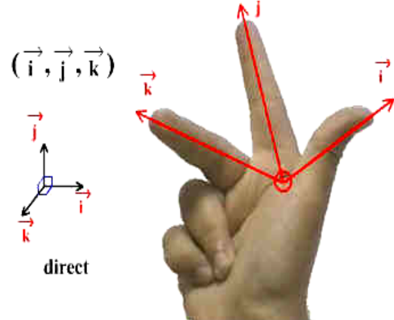


Figure I.22

VII. LE PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS

VII.1. Définition

Soit trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, le produit mixte de ces trois vecteurs est le scalaire :

$$a = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

C'est le produit scalaire de l'un des vecteurs par le produit vectoriel des deux autres. L'ordre des vecteurs est important.

En posant A_x, A_y, A_z ; B_x, B_y, B_z et C_x, C_y, C_z les composantes respectives de $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le produit mixte de ces trois vecteurs est le **scalaire** défini par la relation:

$$a = \vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k})\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (I.19)$$

$$= A_x\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + A_y\begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + A_z\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

Interprétation géométrique :

Considérons le vecteur $\vec{V} = (\vec{B}\wedge\vec{C})$ dont le module est égal à la surface du parallélogramme construit sur les représentants de $\vec{B}$ et $\vec{C}$. Remarquons que $\vec{A}\cdot\vec{V} = OH\cdot|\vec{V}|$ où OH est la projection de $\vec{A}$ sur le support de $\vec{V}$. En conséquence, la valeur absolue du produit mixte $a = \vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ mesure le volume du parallélépipède (figure I.23).

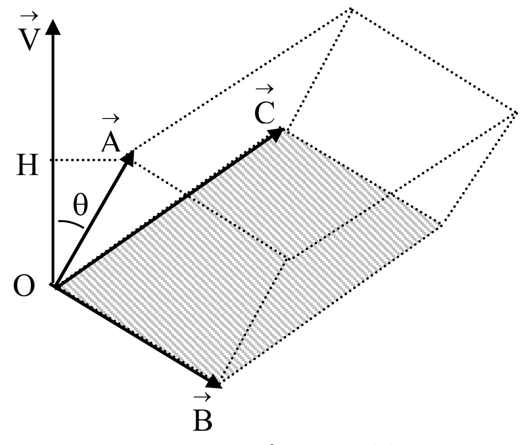


Figure I.23

VII.2. Propriété

Une permutation circulaire des vecteurs ne modifie pas la valeur du produit mixte :

$$a = \vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{C}\wedge\vec{A}) \qquad (I.20)$$

VII.3. Application du produit mixte en physique

Le moment d'une force $\vec{F}$, appliquée au point M de l'espace, par rapport à un axe (Oz) muni du vecteur unitaire $\vec{k}$ (figure I.24) est donné par la relation:

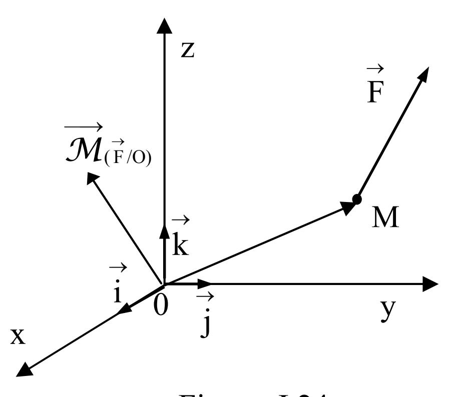


Figure I.24

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\vec{F}/Oz)} = \vec{k}\cdot\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}\right)$$

VIII. ANALYSE DIMENSIONELLE

VIII.1. Dimension – Equation aux dimensions

Toute grandeur physique est caractérisée par sa dimension qui est une propriété associée à une unité. La dimension de la grandeur G se note **[G]**. Elle nous informe sur la nature physique de la grandeur. Par exemple, si G a la dimension d'une masse, on dit qu'elle est homogène à une masse. La relation [G] = M correspond à **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.

Il existe sept grandeurs fondamentales :

- la longueur (L)
- la masse (M)
- le temps (T)
- l'intensité du courant électrique (I)
- la température (θ)
- l'intensité lumineuse (J)
- la quantité de matière (N)

Toutes les autres sont liées à ces grandeurs fondamentales. Par exemple, une aire A étant le produit de deux longueurs, sa dimension est $[A] = L^2$.

Toute relation doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres ont la même dimension. Ainsi l'équation A = B + C.D n'a de sens que si les dimensions de A et de (B + C.D) sont identiques. Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles suivantes :

- la dimension du produit C.D est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D : [C.D] = [C].[D];

- la dimension de la somme B + C.D est la somme des dimensions de chacun des deux termes B et C.D : [B + C.D] = [B] + [C.D].

Remarques :

- Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e J^f N^g \qquad (I.21)$$

- Pour les fonctions sin(f), cos(f), tan(f), log(f) et e^f, l'argument f est sans dimension.

Application : période d'un pendule simple

Intuitivement, on peut penser que la période *P* d'un pendule simple (figure I.25) pourrait dépendre de la longueur *l* du fil, de la masse *m* du corps et de l'accélération de la pesanteur *g*. Etablissons la relation qui décrit cette dépendance.

Expression de *P* en fonction des autres grandeurs :

$$P = k\, m^{\alpha}\, l^{\beta}\, g^{\gamma} \tag{I.22}$$

où *k* est une constante sans dimension et α, β et γ sont des exposants à déterminer.
Remarquons que :

$$[P] = \mathrm{T}\ ;\ [m^{\alpha}] = \mathrm{M}^{\alpha}\ ;\ [l^{\beta}] = \mathrm{L}^{\beta}\ ;\ [g^{\gamma}] = (\mathrm{LT}^{-2})^{\gamma} = \mathrm{L}^{\gamma}\,\mathrm{T}^{-2\gamma}$$

L'équation aux dimensions de (I.22) est alors :

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}^{\alpha}\,\mathrm{L}^{\beta}\,\mathrm{L}^{\gamma}\,\mathrm{T}^{-2\gamma} = \mathrm{M}^{\alpha}\,\mathrm{L}^{\beta+\gamma}\,\mathrm{T}^{-2\gamma}$$

L'équation devant être homogène, il en résulte les relations suivantes

$$\begin{aligned} &\alpha = 0 \\ &\beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = -\gamma \\ &-2\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

l

m

Figure I.25

La relation (I.22) devient alors :

$$P = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Cette analyse montre que la période du pendule ne dépend pas de la masse *m*.

VIII.2. Erreur et incertitude

Dans toute expérience, il n'existe pas de mesures exactes. Celles-ci sont toujours entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon la méthode de mesure adoptée, la qualité des instruments utilisés et le rôle de l'opérateur. L'instrument de mesure, même construit sur un étalon, possède aussi une certaine précision communiquée par le fabricant. Les mesures sont donc réalisées avec des approximations. L'estimation des erreurs commises sur les mesures et de leurs conséquences est alors indispensable.

a. Erreur absolue et erreur relative

L'**erreur absolue** d'une grandeur G mesurée est la différence ΔG entre la valeur expérimentale et une valeur de référence susceptible d'être considérée comme exacte. Dans la pratique, la valeur exacte étant inaccessible, on l'approche en effectuant la moyenne d'une série de mesures de la grandeur G

$$\Delta \mathrm{G} = \mathrm{G}_{\mathrm{mes}} - \mathrm{G}_{\mathrm{ref}}$$

$$G_{ref} = G_{moy} = \frac{\sum_{1}^{n} G_i}{n}$$

où les G_i sont les valeurs obtenues lors de la série des n mesures effectuées.

L'**erreur relative** est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence. L'erreur relative est sans dimension; elle nous indique la qualité (la précision) du résultat obtenu. Elle s'exprime en termes de pourcentage.

$$\text{Erreur relative} = \frac{\Delta G}{G_{ref}}$$

b. Incertitude absolue et incertitude relative

Lors des mesures physiques, nous ne possédons pas en général de valeur de référence, comme celle dont nous venons de parler. Lorsque nous mesurons la distance entre deux points, l'intervalle de temps qui sépare deux événements, la masse d'un objet ou l'intensité d'un courant nous ne savons pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. Toutefois, par une analyse des moyens utilisés pour faire la mesure, nous pouvons introduire les notions suivantes :

L'incertitude absolue sur la mesure de G est l'erreur maximale susceptible d'être commise dans l'évaluation de G.

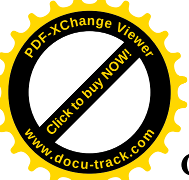
L'incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur de référence de G. Elle s'exprime également en termes de pourcentage et c'est une manière commode de chiffrer la précision d'une mesure.

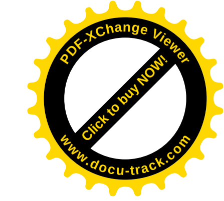
La détermination de l'incertitude absolue nécessite l'identification préalable des sources d'erreurs pouvant affecter la qualité de la mesure et de quantifier les incertitudes qui leur sont associées. En général ces incertitudes sont attribuées aux instruments et à l'opérateur.

Dans le premier cas, le constructeur fournit une notice indiquant l'intervalle de confiance centré sur la valeur affichée. Pour le second cas, l'opérateur doit être en mesure d'estimer l'incertitude de la mesure en fonction de ses propres capacités.

La valeur de la grandeur G peut être obtenue par mesure directe. Dans ce cas, son incertitude est la somme des deux incertitudes précédemment citées. Par exemple pour mesurer une résistance **R** on peut utiliser un ohmètre. Une autre possibilité consiste à mesurer la différence de potentiel **V** à ses bornes et l'intensité I du courant qui la traverse à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre. On utilise alors la relation **R = V/I** et la mesure est ainsi indirecte.

Dans le cas d'une mesure indirecte d'une grandeur G exprimée en fonction de grandeurs indépendantes, la détermination de son incertitude obéit aux règles suivantes :





Cas d'une somme ou d'une différence

Si $G = A + B \Rightarrow \Delta G = \Delta A + \Delta B$, et Si $G = A - B \Rightarrow \Delta G = \Delta A + \Delta B$

Autrement dit, l'incertitude absolue sur la somme ou la différence de deux grandeurs est égale à la **somme** des incertitudes absolues de ces grandeurs.

Cas d'un produit, d'un rapport ou d'une puissance

Supposons maintenant que la grandeur cherchée G soit le résultat du calcul suivant :

$$G = k\,\frac{A^{\alpha}.B^{\beta}}{C^{\gamma}}$$

où A, B et C sont des grandeurs que l'on mesure et k est une constante.

Dans ce cas l'incertitude relative sur le résultat s'obtient selon la démarche suivante :

Nous appliquons la fonction logarithme aux deux membres de la relation

$$\log G = \log\left(k\,\frac{A^{\alpha}.B^{\beta}}{C^{\gamma}}\right) = \log k + \alpha \log A + \beta \log B - \gamma \log C \qquad (\text{I.23})$$

La différentielle de l'expression donne :

$$\frac{dG}{G} = \alpha\frac{dA}{A} + \beta\frac{dB}{B} - \gamma\frac{dC}{C} \qquad (\text{I.24})$$

Sachant que les erreurs absolues ou relatives s'additionnent, nous obtenons :

$$\frac{\Delta G}{G} = \alpha\frac{\Delta A}{A} + \beta\frac{\Delta B}{B} + \gamma\frac{\Delta C}{C} \qquad (\text{I.25})$$

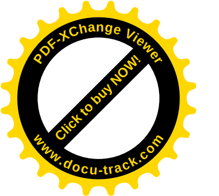
Autrement dit, l'incertitude relative sur un produit ou un rapport de deux grandeurs est égale à la **somme** des incertitudes relatives de ces grandeurs.

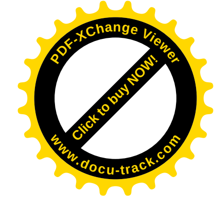
La valeur corrigée de G serait donc :

$$G_{\text{corrigée}} = G \pm \Delta G$$

Dans le cas de la détermination d'une résistance R par la méthode indirecte,

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}$$





CHAPITRE II

CINEMATIQUE

I. INTRODUCTION

La cinématique est la branche de la mécanique qui décrit le mouvement d'un corps, c'est-à-dire la modification apparente de sa position avec le temps, en ignorant les agents qui en sont la cause.

La plupart des corps étudiés par les physiciens sont en mouvement. Le mouvement apparaît à toutes les échelles de l'univers, depuis les particules tels que les électrons, les protons et les neutrons qui constituent les atomes, jusqu'aux galaxies. Il est essentiel de bien définir le mouvement pour pouvoir comprendre beaucoup de phénomènes que nous observons autour de nous.

Un corps peut avoir un mouvement :

- de translation : mouvement d'une voiture sur une route ;
- de rotation : celle de la terre sur elle-même ;
- de vibration : petites oscillations d'un système masse-ressort ;
- combinant plusieurs de ces mouvements.

I.1. Système de référence

Le repos et le mouvement sont deux notions relatives. En effet, un observateur A immobile voit un arbre dans une position fixe alors que le conducteur B d'une voiture roulant à proximité le voit en mouvement vers l'arrière.

Cet exemple montre que la description d'un mouvement doit préciser la nature de l'observateur. En physique, l'étude d'un mouvement est effectuée en remplaçant l'observateur par un système de coordonnées appelé également repère ou système de référence. Un repère peut être fixe ou mobile: le système lié à A est fixe et celui lié à B est mobile.

Pour exprimer les notions de repos et de mouvement par rapport à un référentiel, considérons un repère orthonormé $\Re(O, x, y, z)$ dans lequel est repérée la position M(x,y,z) d'un corps. Le corps est au repos par rapport à ce repère si ses coordonnées sont constantes au cours du temps. Cependant, si au moins l'une d'elles varie le corps est en mouvement par rapport à $\Re$.



I.2. Notion de point matériel

Les mouvements des corps sont souvent très complexes. Lorsque, dans l'étude du mouvement d'un mobile, on ne considère que sa position, on peut, pour simplifier, réduire ce corps à un point matériel ayant la même masse et localisé en son centre de gravité. Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui-même ou son extension spatiale.

Exemple :

Système masse-fil-poulie de la figure II.1:

- A peut être réduit à un point matériel ;
- B et le fil ne peuvent pas l'être.

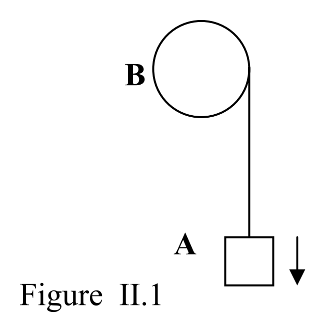


Figure II.1

I.3.Trajectoire

C'est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point matériel au cours du temps et **par rapport au système de référence choisi.**

La trajectoire peut être une réalité matérielle (route, voie ferrée….) ou une réalité physique qui n'est pas matérialisée (trajectoire d'un projectile).

II. MOUVEMENT RECTILIGNE

Le choix de ce mouvement est motivé par sa simplicité : sa description est facile et il est décrit par des équations simples.

II.1. Définition

C'est un mouvement pour lequel la trajectoire suivie est droite. Le repère peut alors être réduit à une origine O et un axe Ox porté par la trajectoire (figure II.2).

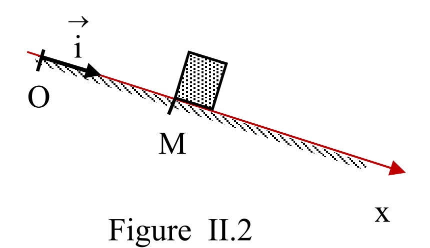


Figure II.2

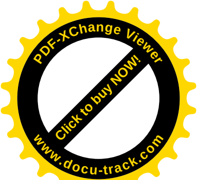
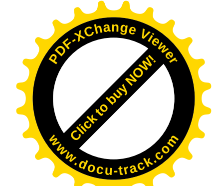
La position M du mobile est repérée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} \qquad \text{(II.1)}$$

II.2. Diagramme des espaces

La position M d'un mobile dépend du temps. Par conséquent, à chaque instant « t » elle peut être repérée par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} \qquad \text{(II.2)}$$

La **relation** $x = f(t)$ est l'**équation horaire** du mouvement. **Exemple :** $x = \frac{1}{2}gt^2$ pour une chute libre d'un corps lâché à l'origine O d'un axe vertical orienté vers le bas.

Le **graphe** de x(t) constitue le **diagramme des espaces.**

Remarque : le diagramme des espaces n'est pas nécessairement une droite même dans le cas d'un mouvement rectiligne. **Il ne faut pas confondre le diagramme des espaces avec la trajectoire.**

Exemple : Diagramme des espaces pour la chute libre:

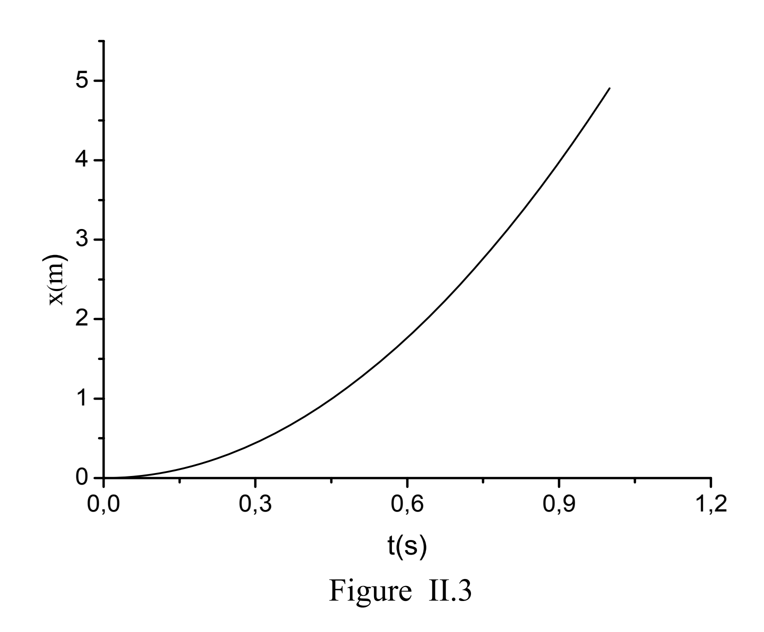


Figure II.3

II.3. Vecteur déplacement

Soient M_i et M_f deux positions d'un mobile sur l'axe (Ox) aux instants t_i et t_f respectivement. Le vecteur $\overrightarrow{M_iM_f}$ est appelé **vecteur déplacement** entre t_i et t_f.

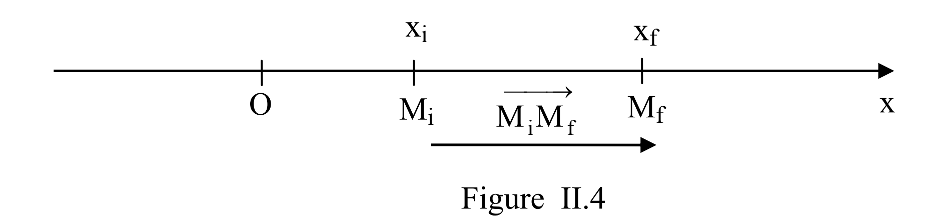
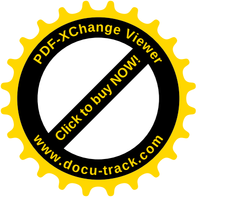
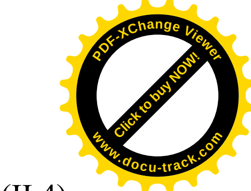


Figure II.4

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{M_iM_f} = \overrightarrow{M_iO} + \overrightarrow{OM_f} \qquad \text{(II.3)}$$

La relation entre ce vecteur déplacement et les vecteurs positions est alors:

$$\overrightarrow{M_iM_f} = \Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_f} - \overrightarrow{OM_i} \qquad (II.4)$$

En conséquence, sa composante sur l'axe (Ox) est:

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad (II.5)$$

Remarque : il ne faut pas confondre son module avec la distance parcourue. En effet, si nous considérons le déplacement $M_i \rightarrow O \rightarrow M_f$ d'un mobile en mouvement sur un axe Ox,

$\left|\overrightarrow{M_iM_f}\right| = |x_f - x_i|$ et la distance parcourue est donnée par $d = \left|\overrightarrow{M_iO}\right| + \left|\overrightarrow{OM_f}\right| = |x_i| + |x_f|$.

II.4. Vitesse

a. Définition

Considérons le mouvement de chute libre d'une bille décrit par les mesures relevées dans le tableau II.1 :

position	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
t(s)	0	1	2	3	4	5
x(m)	0	5	20	45	80	125

Tableau II.1

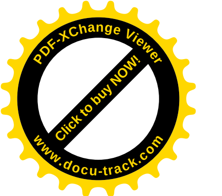
Remarquons que pour les positions successives l'intervalle de temps est constant, soit $\Delta t = 1s$, mais les déplacements correspondants sont de plus en plus grands :

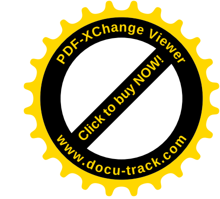
$$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| < \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < \left|\overrightarrow{M_2M_3}\right| < \left|\overrightarrow{M_3M_4}\right| < \left|\overrightarrow{M_4M_5}\right|$$

Cela veut dire que le mobile va de plus en plus vite et pour caractériser cette propriété on introduit la notion de vitesse :

Le **vecteur vitesse** $\vec{V}$ d'une particule traduit le taux de variation de son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

- Cette variation peut concerner la **direction** de $\overrightarrow{OM}$, son **module** ou les **deux.**
- L'unité de la vitesse dans le système international (SI) est le mètre par seconde **(m/s).**







b. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants t_i et t_f correspondant aux positions M_i et M_f est définie par le rapport :

$$\left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}_f - \overrightarrow{OM}_i}{t_f - t_i} \qquad \text{(II.6)}$$

En valeurs algébriques, et dans le cas d'un mouvement rectiligne sur un axe (Ox):

$$\left(V_{mx}\right)_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \qquad \text{(II.7)}$$

Exemple: Considérons le mouvement de chute libre d'une bille décrit par le tableau II.1

$$\left(V_{mx}\right)_{3s}^{5s} = \frac{x_5 - x_3}{t_5 - t_3} = \frac{125-45}{5-3} = 40\ (m/s) \qquad \left(\vec{V}_m\right)_{3s}^{5s} = 40\,\vec{i}\,(m/s)$$

$$\left(V_{mx}\right)_{0s}^{5s} = \frac{x_5 - x_0}{t_5 - t_0} = \frac{125-0}{5-0} = 25\ (m/s) \qquad \left(\vec{V}_m\right)_{0s}^{5s} = 25\,\vec{i}\,(m/s)$$

Remarque 1: dans le diagramme des espaces de la figure II.5

$$\left(V_{mx}\right)_{t_A}^{t_B} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{pente de la sécante (le segment) AB}$$

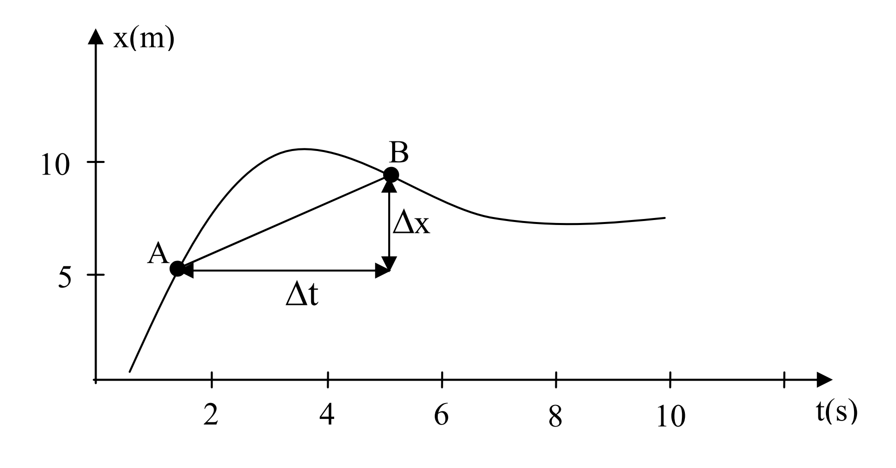
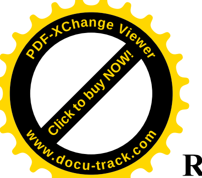
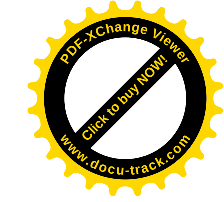


Figure II.5

Remarque 2: la vitesse moyenne scalaire est donnée par le rapport :

$$V = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps mis}} = \frac{d}{\Delta t} \qquad \text{(II.8)}$$

Remarque 3 : une vitesse moyenne $\left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f}$ caractérise l'intervalle de temps $\left[t_i, t_f\right]$ dans lequel elle est déterminée. Dans l'exemple précédent de la chute libre :

$$\left(\vec{V}_m\right)_{0s}^{5s} \neq \left(\vec{V}_m\right)_{1s}^{5s} \neq \left(\vec{V}_m\right)_{2s}^{5s} \neq \left(\vec{V}_m\right)_{0s}^{4s}.$$

- **Vitesse instantanée**

α. Définition

Il arrive que l'on s'intéresse à la vitesse d'une particule à un instant particulier t correspondant à une position donnée. Considérons l'exemple de diagramme des espaces de la figure II.6. La vitesse moyenne $\left(\vec{V}_m\right)_{t_A}^{t_B}$ caractérise l'intervalle $\left[t_A, t_B\right]$. Pour avoir une vitesse qui se réfère à l'instant t_A, intuitivement il convient de réduire l'intervalle $\left[t_A, t_B\right]$ à $\left[t_A, t_A\right]$. Cela revient à faire tendre t_B vers t_A, soit :

$$V_x\left(t_A\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_A} \qquad \text{(II.9)}$$

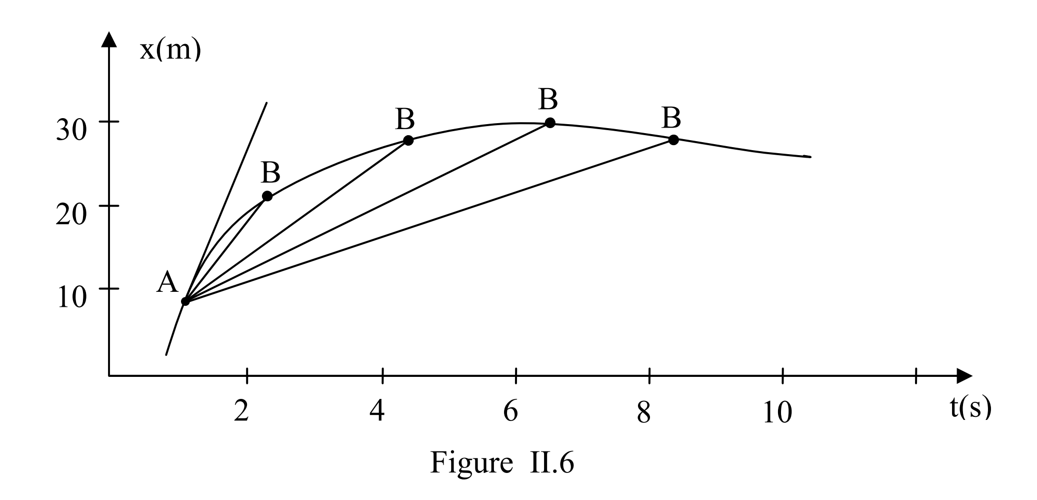
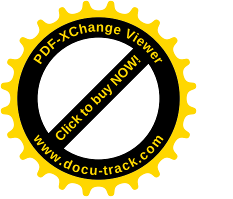
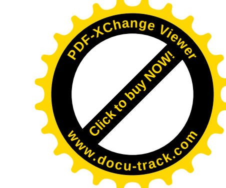


Figure II.6

Ainsi, la pente du segment AB tendra vers celle de la tangente au graphe, au point A (voir figure II.6). Comme x est la projection algébrique du vecteur position sur l'axe, ceci nous suggère la définition suivante :

le vecteur **vitesse instantanée** d'un mobile, au temps t, est donné par la relation

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \text{(II.10)}$$

Algébriquement, dans le cas d'un mouvement rectiligne suivant (Ox) :

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \text{pente de la tangente au diagramme des espaces}$$

au point correspondant à l'instant t.

Le **graphe** de V_x (t) est appelé **diagramme de la vitesse.**

β. Mesure de la vitesse

Première méthode: si nous disposons du diagramme des espaces, nous pouvons obtenir les valeurs algébriques, V_x , en mesurant les pentes des tangentes au graphe aux points considérés. Il est important de faire attention aux unités et aux signes

Exemple

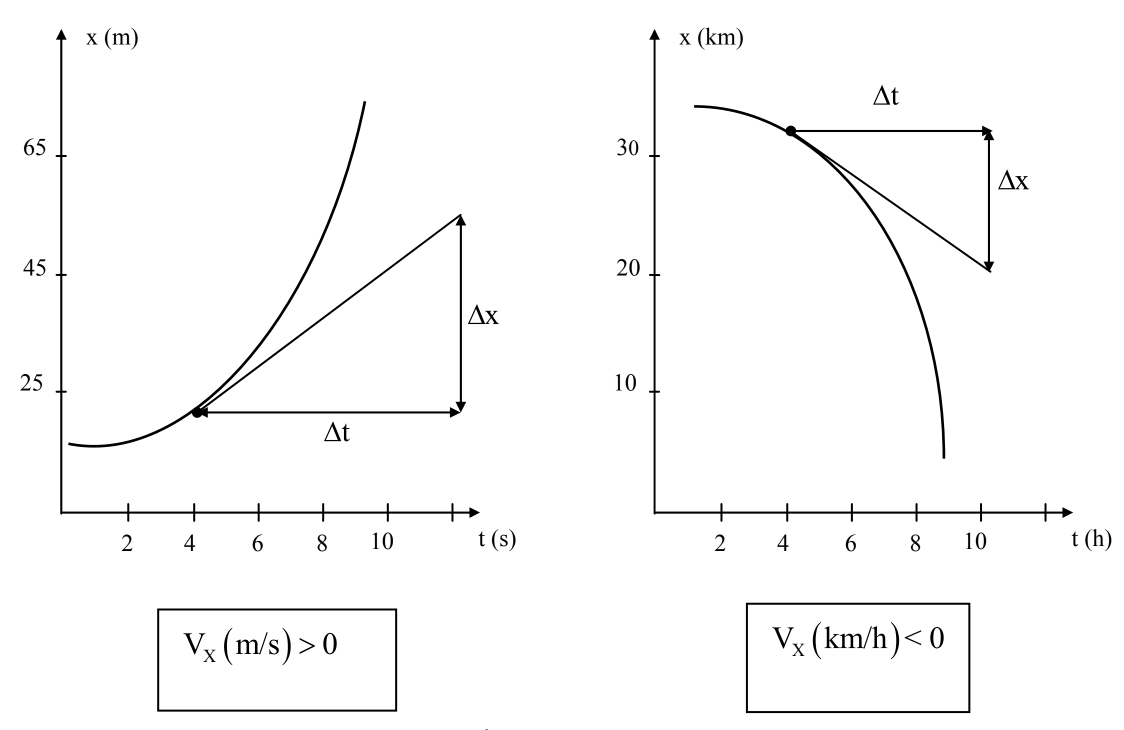


Figure II.7

Deuxième méthode : lorsqu'on dispose d'un nombre suffisant de couples de valeurs $(t, V_x(t))$, on peut tracer le graphe de $V_x(t)$ et obtenir les valeurs inconnues par extrapolation ou interpolation comme l'illustre la figure II.8.

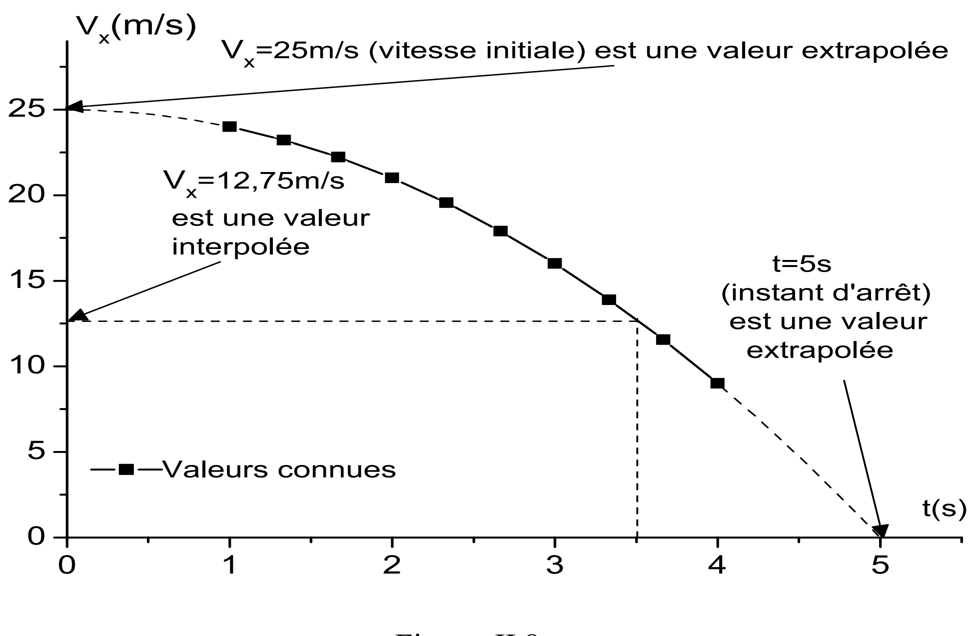


Figure II.8

Troisième méthode: on peut confondre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée dans deux cas :

1^er^ cas: lorsque la vitesse est constante (mouvement uniforme) et on a :

$$\vec{V}(t) = \left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f} \quad \forall\ t,\ t_i \text{ et } t_f \qquad \text{(II.11)}$$

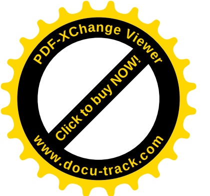
2^ème^ cas: lorsque l'écart $\Delta t = t_f - t_i$ est suffisamment petit on peut confondre la vitesse moyenne $\left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f}$ avec la vitesse instantanée $\vec{V}(t)$ au milieu de l'intervalle: $[t_i, t_f]$

$$\Delta t = t_f - t_i < \varepsilon(\text{petit}) \Rightarrow \vec{V}(t) = \left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f} \quad \text{avec } t = \frac{t_i + t_f}{2} \qquad \text{(II.12)}$$

Remarques:

- $\Delta t = t_f - t_i$ **est suffisamment petit** lorsque la différence entre $\vec{V}(t)$ et $\left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f}$ n'est pas significative par rapport aux erreurs de mesure.

- le milieu de l'intervalle $[t_i, t_f]$ ne correspond pas nécessairement au milieu du segment M_iM_f .





II.5. Accélération

La vitesse pouvant varier avec le temps, on caractérise ce changement en introduisant la notion d'accélération.

Le **vecteur accélération** $\vec{a}$ traduit le taux de variation du vecteur vitesse $\vec{V}$ en fonction du temps**.**

- Cette variation peut concerner la **direction** de la vitesse, son **module** ou les **deux ;**
- L'unité de l'accélération dans le système international est le $\mathbf{m/s^2}$.

a. Définitions

En adoptant la démarche suivie dans le cas de l'introduction de la vitesse nous pouvons définir les grandeurs suivantes:

α. Accélération moyenne

L'accélération moyenne d'un mobile entre deux instants t_i et t_f est donnée par le rapport :

$$\left(\vec{a}_m\right)_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_i}{t_f - t_i} \qquad \text{(II.13)}$$

En valeurs algébriques, et dans le cas d'un mouvement rectiligne sur (Ox),

$$\left(a_{mx}\right)_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{V_{xf} - V_{xi}}{t_f - t_i} \qquad \text{(II.14)}$$

β. Accélération instantanée :

L'accélération moyenne caractérise l'intervalle de temps $[t_i, t_f]$. Le passage à la grandeur instantanée s'effectue de façon analogue à celui de la vitesse. L'accélération, à un instant t donné, est alors définie par :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \text{(II.15)}$$

Algébriquement, dans le cas d'un mouvement rectiligne suivant (Ox) :

$$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = \text{pente de la tangente au diagramme de la vitesse} \qquad \text{(II.16)}$$





Remarque: notons que

$$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{(II.17)}$$

Ainsi, l'orientation de la concavité du diagramme des espaces donne le signe de a_x :

- $a_x > 0$ concavité vers le sens positif de l'axe (Ox) ;
- $a_x < 0$ concavité vers le sens négatif de l'axe (Ox) .

Exemple: Pour le mouvement décrit par le diagramme des espaces de la figure II.9 :

$$a_x(t_A) > 0 \qquad a_x(t_B) < 0 \qquad a_x(t_C) = 0$$

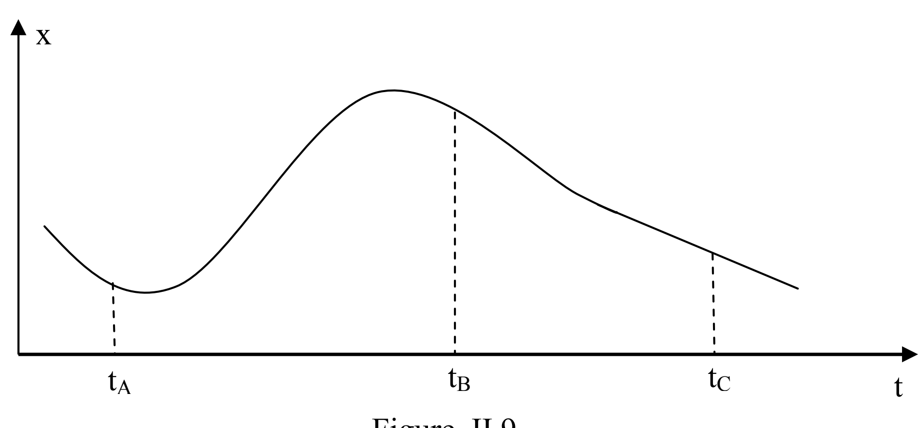


Figure II.9

b. Mesure de l'accélération

Comme pour la vitesse, on peut déterminer l'accélération :

- en mesurant les pentes des tangentes aux diagrammes des vitesses ;
- en procédant par interpolation ou extrapolation sur les graphes des accélérations ;
- en confondant l'accélération moyenne $\left(\vec{a}_m\right)_{t_i}^{t_f}$ avec l'accélération instantanée $\vec{a}(t)$ au milieu de l'intervalle de temps $[t_i, t_f]$ si celui-ci est suffisamment petit :

$$\Delta t = t_f - t_i < \varepsilon(\text{petit}) \Rightarrow \vec{a}(t) = \left(\vec{a}_m\right)_{t_i}^{t_f} \quad \text{avec } t = \frac{t_i + t_f}{2}$$

II.6. Relations intégrales

Dans ce qui précède il apparaît que l'on peut passer de la position à la vitesse et de la vitesse à l'accélération par dérivation. Dans cette partie on montrera que le passage en sens inverse peut être effectué par intégration.




a. Passage de la vitesse à la position

La position et la vitesse sont reliées par :

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

soit :

$$dx = V_x(t)\,dt$$

et, par intégration entre deux instants t_i et t_f, on obtient :

$$x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} V_x(t)\,dt \qquad \text{(II.18)}$$

Conséquence : si nous connaissons la position x_0 d'un mobile, à un instant particulier t_0, et l'expression de sa vitesse en fonction du temps, il est alors possible de déterminer sa position x(t) à n'importe quel instant t en écrivant :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V_x(t)\,dt \qquad \text{(II.19)}$$

Exemple: Un mobile, animé d'un mouvement sur l'axe (Ox) avec une vitesse $V_x(t) = 2t + 1\ (m/s)$ passe au point d'abscisse $x_0 = 2m$ au temps $t_0 = 0s$.
Déterminez l'équation horaire de la position.

Réponse:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V_x(t)\,dt = 2 + \int_{0}^{t} (2t+1)\,dt = t^2 + t + 2\ (m)$$

Graphiquement, l'équivalence entre la valeur de l'intégrale d'une fonction et l'aire située entre la courbe de son graphe et l'axe des abscisses nous permet d'écrire :

$$x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} V_x(t)\,dt \qquad \text{(II.20)}$$

= aire **algébrique** délimitée par la courbe de $V_x(t)$, l'axe des temps et les droites $t = t_i$ et $t = t_f$

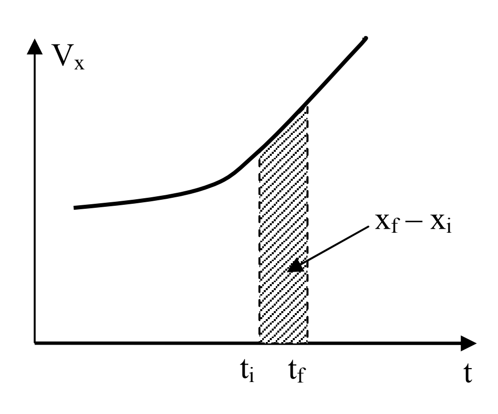
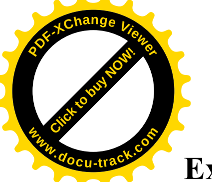


Figure II.10



Exemple: considérons le diagramme de vitesse de la figure II.11 ; connaissant $x(0s)=1\text{ m}$, déterminons $x(2s)$ et $x(5s)$.

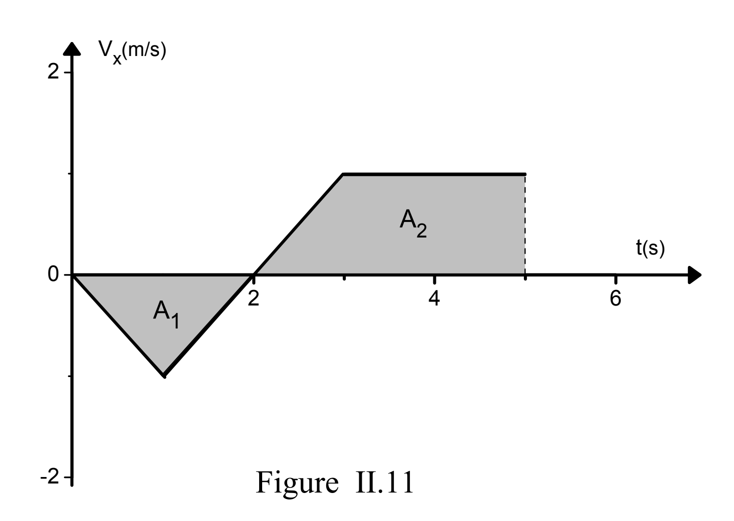


Figure II.11

$$x(2s)=x(0s)+\int_0^2 V_x(t)\,dt = 1+\text{aire } A_1$$

$$=1+\frac{2(-1)}{2}=0\text{ m}$$

$$x(5s)=x(2s)+\int_2^5 V_x(t)\,dt = 0+\text{aire } A_2$$

$$=\frac{\left[(5-3)+(5-2)\right]\times 1}{2}=2,5\text{ m}$$

Remarques:

- Les aires étant **algébriques**, toute partie se trouvant sous l'axe (Ot) est négative et celle se trouvant au-dessus est positive. Dans l'exemple précédent :

$$A_1=\int_0^2 V_x(t)\,dt=-1\text{ m}<0$$

$$A_2=\int_2^5 V_x(t)\,dt=2,5\text{ m}>0.$$

- Pour calculer la distance parcourue entre $0s$ et $5s$ on fait la somme des valeurs **absolues** des aires considérées : $d\big|_{0s}^{5s}=|A_1|+|A_2|=1+2,5=3,5\text{ m}$.





b. Passage de l'accélération à la vitesse

L'accélération et la vitesse sont reliées par :

$$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt}$$

soit :

$$dV_x = a_x(t)\,dt$$

L'intégration entre deux instants t_i et t_f donne :

$$V_x(t_f) - V_x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)\,dt \qquad \text{(II.21)}$$

Conséquence: si nous connaissons la vitesse V_{x0} d'un mobile, à un instant particulier t_0, et l'expression de son accélération $a_x(t)$ en fonction du temps, il est possible de déterminer sa vitesse $V_x(t)$ à n'importe quel instant t, en écrivant :

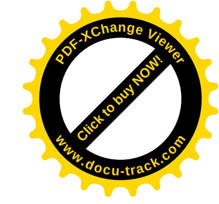
$$V_x(t) = V_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \qquad \text{(II.22)}$$

Graphiquement,

$$V_x(t_f) - V_x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)\,dt \qquad \text{(II.23)}$$

Cette expression représente l'**aire algébrique** délimitée par la courbe de $a_x(t)$, l'axe des temps et les droites $t = t_i$ et $t = t_f$.

Exemple: A partir du diagramme de l'accélération de la figure II-12, déterminons $V_x(2s)$ et $V_x(6s)$, sachant que $V_x(0s) = 1\,m/s$.



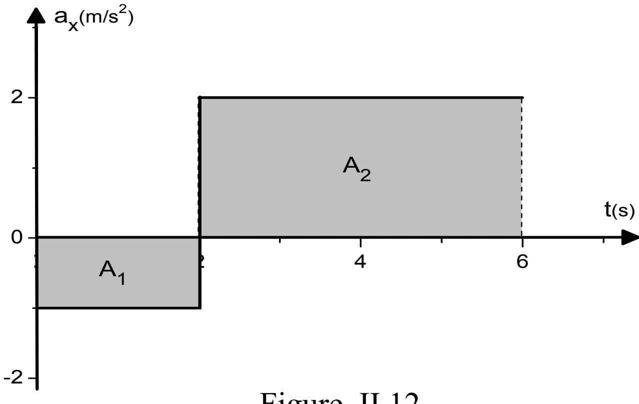
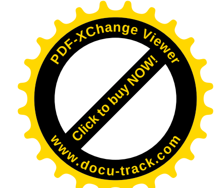


Figure II.12





$$V_x(2s) = V_x(0s) + \int_0^2 a_x(t)\,dt = 1 + \text{aire } A_1$$
$$= 1 + 2(-1) = -1 \text{ m/s}$$

$$V_x(6s) = V_x(2s) + \int_2^6 a_x(t)\,dt = -1 + \text{aire } A_2$$
$$= -1 + 4x2 = 7 \text{ m/s}$$

II.7. Etude cinématique de mouvements rectilignes particuliers

a. Mouvement rectiligne uniforme

On considère le mouvement d'un mobile comme étant uniforme lorsque la valeur algébrique de sa vitesse est constante. C'est un mouvement sans accélération en vertu de la relation :

$$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = 0$$

A partir de la formule intégrale, pour $x_0 = x(0)$, on obtient :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t V_x\,dt = V_x \cdot t + x_0 \qquad \text{(II.24)}$$

Diagrammes :

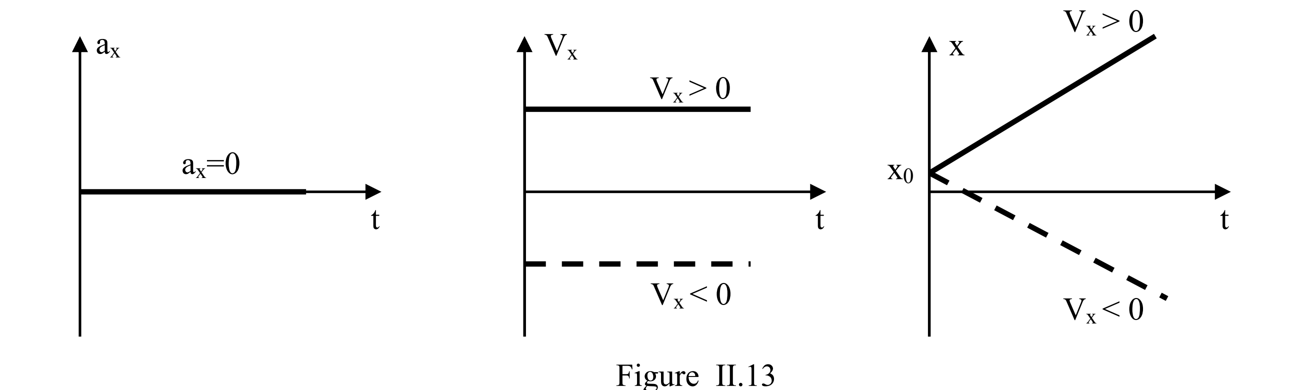


Figure II.13

b. Mouvement rectiligne uniformément varié

On dit que le mouvement est uniformément varié lorsque l'accélération du mobile est constante. En utilisant le calcul intégral, on obtient

- pour la vitesse : $V_x(t) = V_{x0} + \int_0^t a_x dt = a_x t + V_{x0}$ avec $V_{x0} = V_x(0)$

- pour la position : $x(t) = x_0 + \int_0^t V_x dt = x_0 + \int_0^t (a_x t + V_{x0}) dt$

$$= \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{x0} t + x_0 \quad \text{avec } x_0 = x(0)$$

Exemples de diagrammes :

- Cas où $a_x > 0$

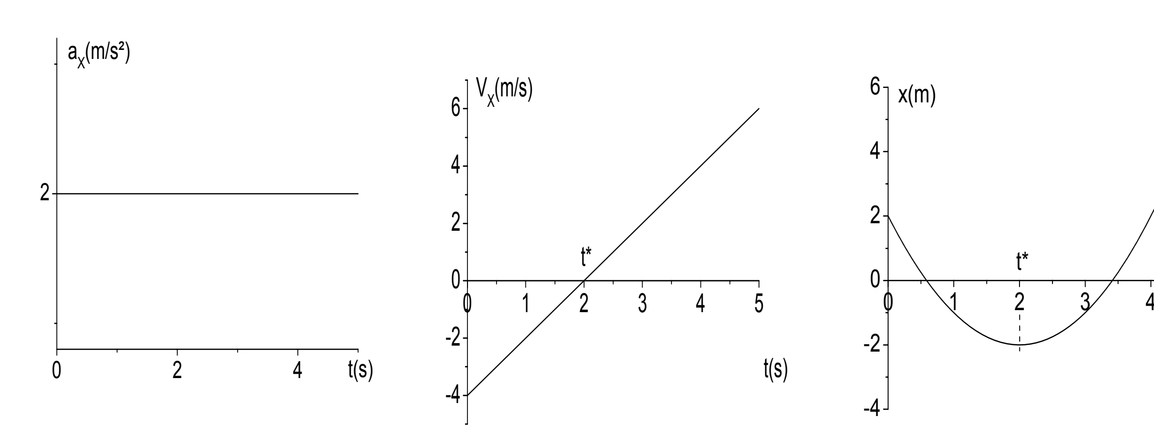


Figure II.14

- Cas où $a_x < 0$

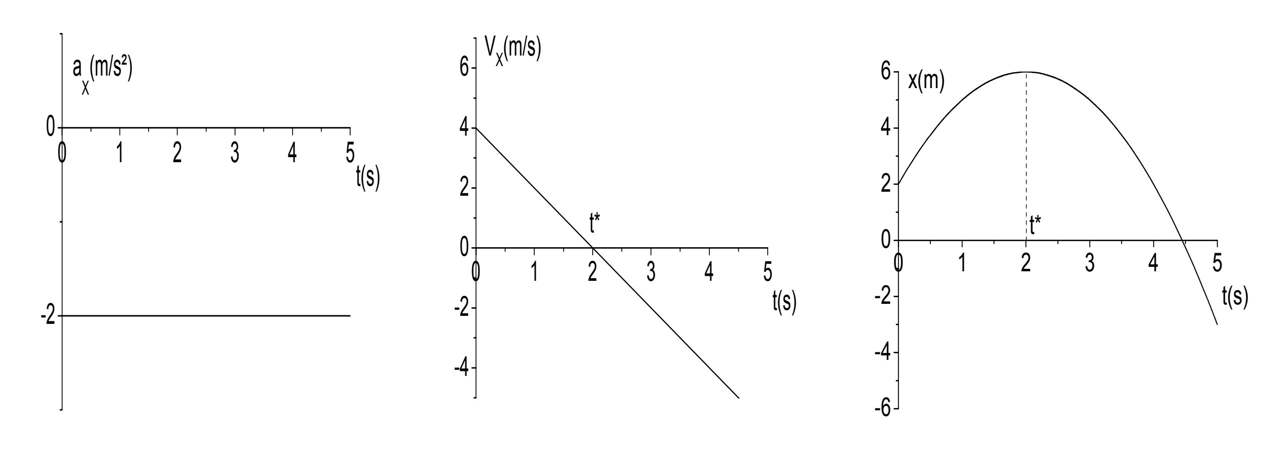
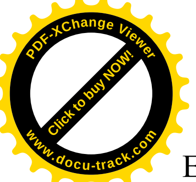


Figure II.15

c. Formule indépendante du temps

Cette formule est valable uniquement pour le mouvement **uniformément varié** ($a_x = \text{constante}$). Par définition

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow dV_x = a_x dt$$





En multipliant les deux membres par V_x, on obtient :

$$V_x dV_x = a_x V_x dt$$

Comme

$$V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V_x dt = dx$$

il vient

$$V_x dV_x = a_x dx$$

soit

$$\int_{V_{x_1}}^{V_{x_2}} V_x dV_x = \int_{x_1}^{x_2} a_x dx$$

a_x étant constant, on obtient :

$$V_{x_2}^2 - V_{x_1}^2 = 2a_x(x_2 - x_1) \qquad \text{(II.25)}$$

d. Natures particulières du mouvement rectiligne

- V_x = constante : le mouvement est rectiligne uniforme ;
- a_x = constante : le mouvement est rectiligne uniformément varié ;
- $a_x \cdot V_x > 0$: le mouvement est rectiligne accéléré (uniformément si a_x = constante) ;
- $a_x \cdot V_x < 0$: le mouvement est rectiligne décéléré ou retardé (uniformément si a_x = constante).

III. MOUVEMENT DANS L'ESPACE

C'est un mouvement dont la trajectoire est une courbe quelconque, c'est-à-dire qu'elle n'est pas nécessairement droite.

III.1. Repérage de la position

Pour décrire le mouvement d'un mobile, il faut choisir une origine O qui servira de point de repère. Sa position P(t) est repérée à chaque instant par le vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ (figure II.16). Pour analyser le mouvement, il faut définir un système de coordonnées lié à l'origine O. Le choix de ce système dépend des propriétés spécifiques du problème considéré.

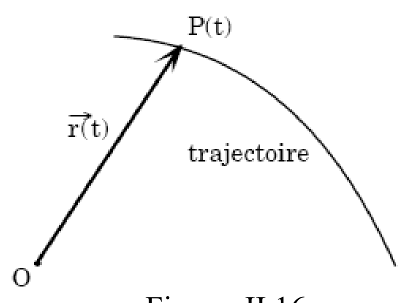
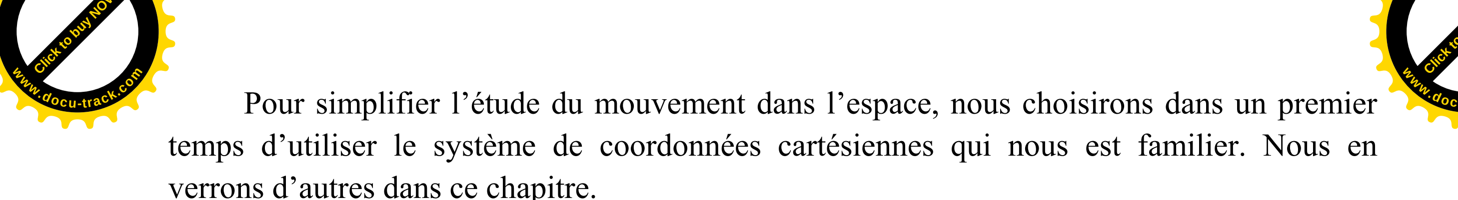


Figure II.16



Pour simplifier l'étude du mouvement dans l'espace, nous choisirons dans un premier temps d'utiliser le système de coordonnées cartésiennes qui nous est familier. Nous en verrons d'autres dans ce chapitre.

Le système de coordonnées cartésiennes adopté est composé de trois axes (Ox, Oy, Oz), munis des vecteurs unitaires $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ (figure II.17). Les éléments $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forment une base orthonormée (ils sont perpendiculaires entre eux et de modules égaux à l'unité).

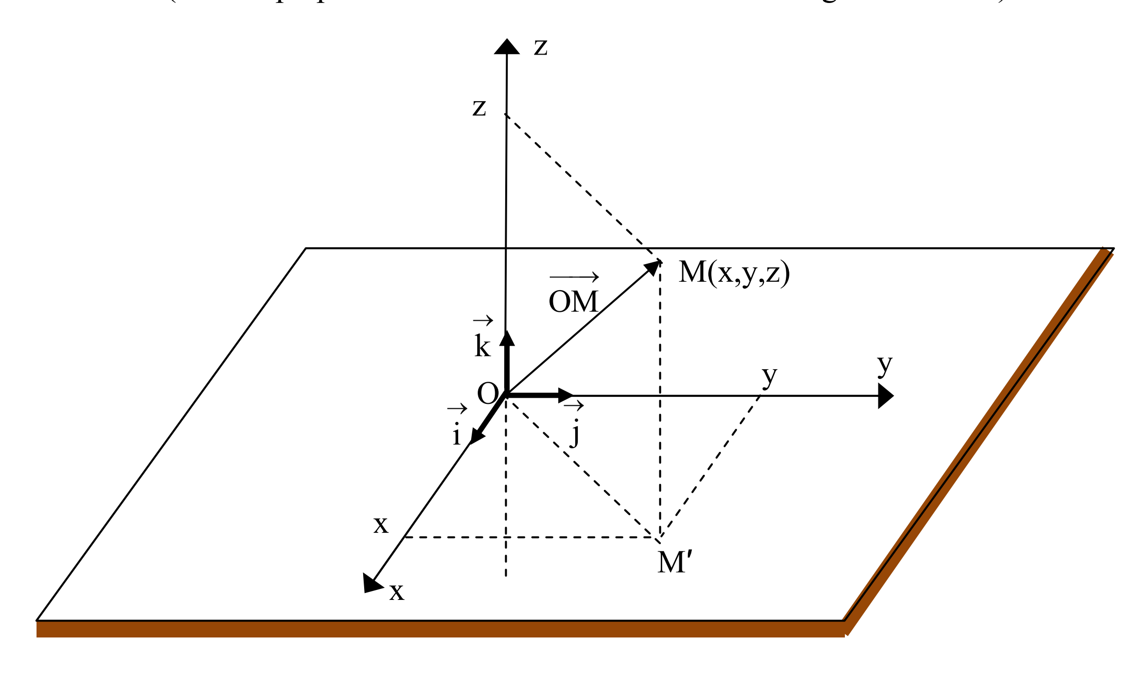


Figure II.17

Dans ce référentiel, le vecteur position d'un mobile M s'écrit comme suit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad \text{(II.26)}$$

x, y et z sont les coordonnées du point M dans notre référentiel. Comme la position varie avec le temps, ces coordonnées sont des fonctions de la variable t.

Les relations $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ constituent les **équations paramétriques** du mouvement.

Exemple

La figure II.18 représente la trajectoire d'un mouvement hélicoïdal. A chaque instant, la position M du mobile est repérée par ses coordonnées cartésiennes données par les équations paramétriques

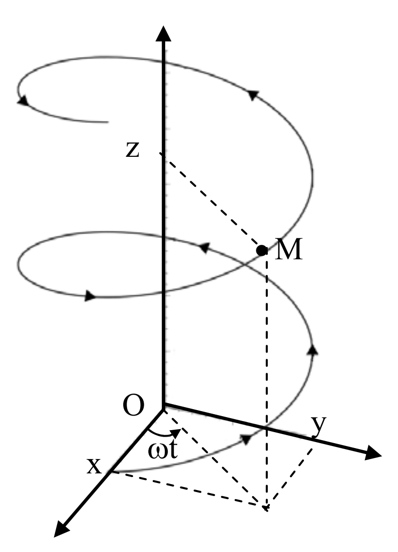


Figure II.18

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t) \\ y = x_0 \sin(\omega t) \\ z = V_z t \end{cases}$$

où x_0 et V_z sont des constantes.

Remarques:

- Dans le cas général, nous repérons une position en utilisant ses trois coordonnées dans un système à trois axes (tridimensionnel). Lorsque le mouvement a lieu dans un plan (mouvement plan), on peut réduire le repère à un système bidimensionnel composé, par exemple, des axes (Ox, Oy) contenus dans le plan du mouvement.

- L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant la variable t entre les équations paramétriques. Par exemple, pour le mouvement d'un projectile lancé de l'origine O avec une vitesse initiale, $\vec{V}_0$, horizontale, les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

pour un axe (Oy) ascendant. On peut alors écrire :

$$t = \frac{x}{V_0}$$

En substituant cette expression dans l'équation de y, on obtient celle de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2} x^2$$

Lorsque les équations paramétriques contiennent des fonctions trigonométriques de la variable temps, il faut essayer de procéder en exploitant certaines relations qui les caractérisent. Par exemple, si

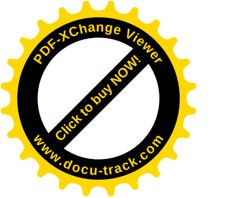
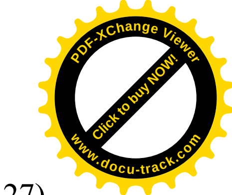
$$\begin{cases} x(t) = \cos t^2 \\ y(t) = \sin t^2 \end{cases}$$

Alors

$$x^2 + y^2 = (\cos t^2)^2 + (\sin t^2)^2 = 1$$

III.2. Vecteur déplacement

Si à l'instant t_1 un mobile se trouve en M_1 tel que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t_1) = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k} \qquad \text{(II.27)}$$

et à l'instant t_2 il se trouve en M_2 tel que :

$$\overrightarrow{OM_2}(t_2) = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k} \qquad \text{(II.28)}$$

le vecteur déplacement est le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ (figure II.19).

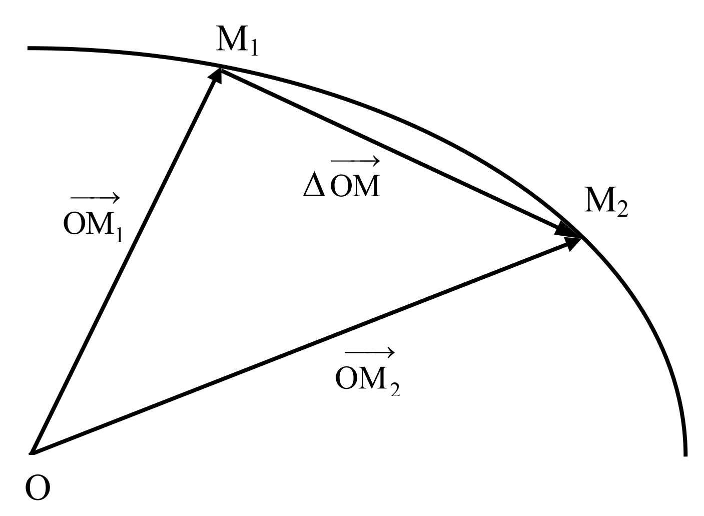


Figure II.19

Sa relation avec les vecteurs positions est alors:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM} = \Delta\vec{r} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \qquad \text{(II.29)}$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes :

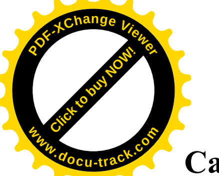
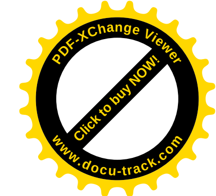
$$\Delta\vec{r} = \Delta\overrightarrow{OM} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta z = z_2 - z_1 \end{cases} \qquad \text{(II.30)}$$

III.3. Vecteur vitesse

a. Vecteur vitesse moyenne $\left(\vec{V}_m\right)_{t_1}^{t_2}$

Soient M_1 la position du mobile à l'instant t_1 et M_2 celle à l'instant t_2. Dans ce cas aussi, nous définissons le vecteur vitesse moyenne entre ces deux instants par :

$$\left(\vec{V}_m\right)_{t_1}^{t_2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} \qquad \text{(II.31)}$$

Caractéristiques:

- son module est :

$$\left|\vec{V}_m\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\Delta t} = \frac{\left|\Delta\,\overrightarrow{OM}\right|}{\Delta t} \qquad \text{(II.32)}$$

- il a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{M_1M_2}$.
- c'est un vecteur glissant ; son point d'application est un point du segment $[M_1M_2]$.

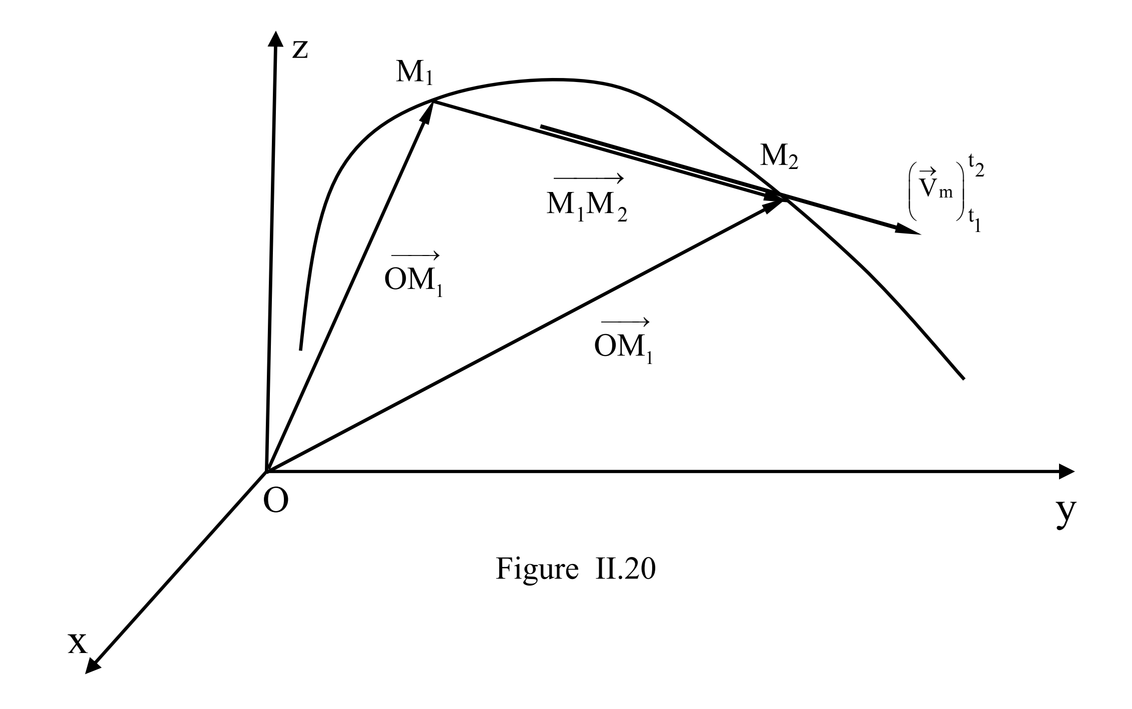


Figure II.20

Son expression analytique dans le système de coordonnées cartésiennes est:

$$\left(\vec{V}_m\right)_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \qquad \text{(II.33)}$$

$$= V_{mx}\,\vec{i} + V_{my}\,\vec{j} + V_{mz}\,\vec{k}$$

b. Vitesse instantanée $\vec{V}(t)$

Comme pour le mouvement rectiligne, la vitesse instantanée, dans son sens général, donne des renseignements plus précis que le vecteur vitesse moyenne : **elle définit la vitesse du mobile à chaque instant.**

Click to buy NOW! PDF-XChange Viewer www.docu-track.com

La vitesse instantanée s'obtient également, à partir de la vitesse moyenne en réduisant l'intervalle de temps Δt jusqu'à zéro. Ainsi, la vitesse instantanée $\vec{V}_1(t_1)$ s'obtient en considérant la limite de $\left(\vec{V}_m\right)_{t_1}^{t_2}$ lorsqu'on fait tendre M_2 vers M_1. Graphiquement, la direction du vecteur déplacement tend vers celle de la tangente en M_1. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \text{(II.34)}$$

✓ **Caractéristiques**:

- Le **vecteur vitesse instantanée** est, à chaque instant, **tangent à la trajectoire;**
- Son **sens** est **celui du mouvement.**

✓ **Composantes dans un système de coordonnées cartésiennes:**

Dans la base $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $\vec{V}$ s'exprime :

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= \frac{d}{dt}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right) \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k} \end{aligned} \qquad \text{(II.35)}$$

soit

$$\vec{V}(t)\left|\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \text{pente de la tangente au graphe de } x(t) \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \text{pente de la tangente au graphe de } y(t) \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \text{pente de la tangente au graphe de } z(t) \end{aligned}\right. \qquad \text{(II.36)}$$

et

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \qquad \text{(II.37)}$$

✓ **Mouvement plan:**

La base est réduite à $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\vec{V}$ s'exprime :

$$\vec{V}(t) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$$

soit

$$\vec{V}(t) \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

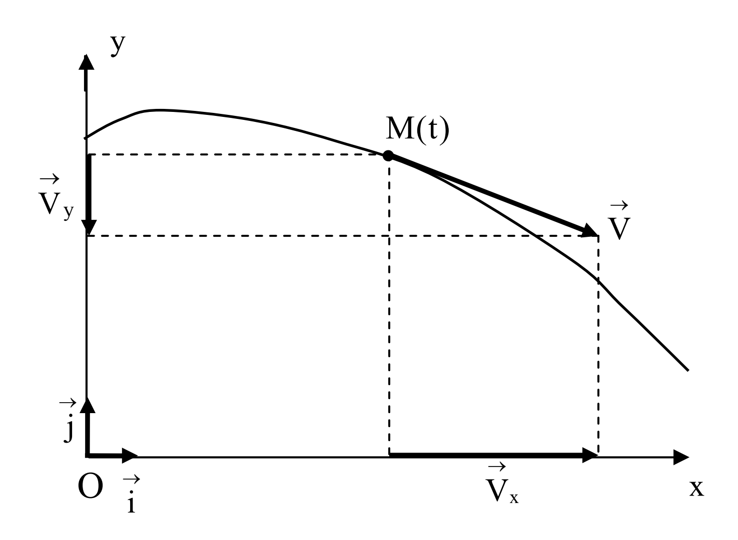


Figure II.21

III.4. Vecteur accélération

a. Vecteur accélération moyenne $\left(\vec{a}_m\right)_{t_1}^{t_2}$

La variation relative de la vitesse au cours de l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est donnée par le vecteur accélération moyenne :

$$\left(\vec{a}_m\right)_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} \qquad \text{(II.38)}$$

- son module est :

$$\left|\vec{a}_m\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{\left|\Delta \vec{V}\right|}{\Delta t} \qquad \text{(II.39)}$$




- il a même direction et même sens que $\Delta \vec{V}$;

- généralement $\left(\vec{a}_m\right)_{t_1}^{t_2}$ est appliqué au point M où le mobile se trouve à l'instant t

milieu de l'intervalle , soit: $t = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$ (figure II.22).

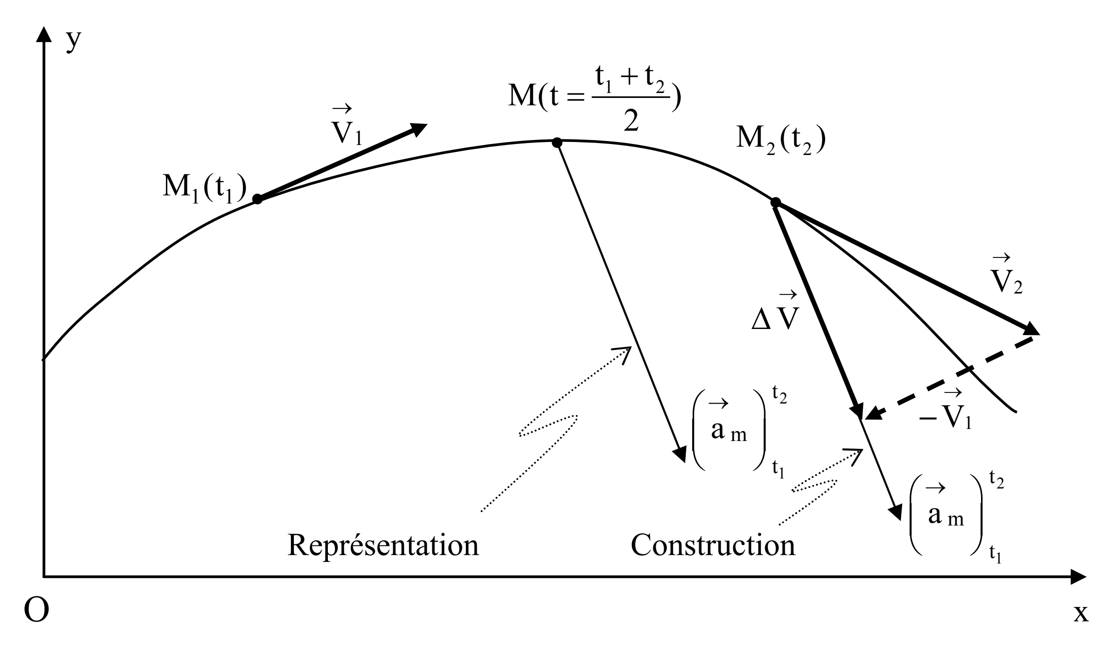


Figure II.22

D'un point de vue algébrique, ceci nous amène à écrire dans le repère cartésien :

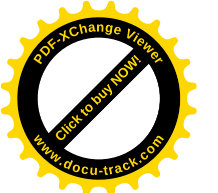
$$\left(\vec{a}_m\right)_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t}\vec{k} \qquad \text{(II.40)}$$
$$= a_{mx}\,\vec{i} + a_{my}\,\vec{j} + a_{mz}\,\vec{k}$$

b. Vecteur accélération instantanée $\vec{a}(t)$

Comme précédemment, nous allons passer à la limite $\Delta t \to 0$ pour obtenir l'accélération instantanée

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Son module, sa direction et son sens ne peuvent généralement être précisés qu'en introduisant ses composantes dans un système de référence. Toutefois $\vec{a}$ **est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire.**



Dans le système de coordonnées cartésiennes, $\vec{a}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}) \\ &= \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} \\ &= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\end{aligned} \qquad \text{(II.41)}$$

soit

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \text{ pente de la tangente au graphe de } V_x(t) \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \text{ pente de la tangente au graphe de } V_y(t) \\ a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \text{ pente de la tangente au graphe de } V_z(t) \end{cases} \qquad \text{(II.42)}$$

et

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \text{(II.43)}$$

III.5. Passage de l'accélération à la vitesse et à la position

Rappelons que $\vec{V}(t)$ et $\vec{a}(t)$ s'obtiennent par dérivation à partir de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt}$$

Il arrive que c'est l'accélération qui est connue. Il faut donc passer de celle-ci à la vitesse et ensuite à la position, par intégration. Pour ce faire, nous pouvons mettre les deux relations précédentes sous la forme :

$$d\,\vec{r}(t) = \vec{V}(t)dt \qquad \text{et} \qquad d\,\vec{V}(t) = \vec{a}(t)dt$$

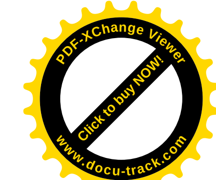
Algébriquement ces relations donnent :

$$dx(t) = V_x(t)dt \quad ; \quad dy(t) = V_y(t)dt \quad ; \quad dz(t) = V_z(t)dt$$

$$dV_x(t) = a_x(t)dt \quad ; \quad dV_y(t) = a_y(t)dt \quad ; \quad dV_z(t) = a_z(t)dt$$

L'intégration de ces équations a pour conséquences :





- si nous connaissons le vecteur position $\overrightarrow{OM_0}\left(x_0, y_0, z_0\right)$ d'un mobile, à un instant particulier t_0, et l'expression temporelle de sa vitesse $\vec{V}(t)\left(V_x(t), V_y(t), V_z(t)\right)$, il est possible de déterminer sa position à n'importe quel instant t, en écrivant :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} V_x(t)\,dt \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} V_y(t)\,dt \\ z(t) &= z_0 + \int_{t_0}^{t} V_z(t)\,dt \end{aligned} \qquad \text{(II.44)}$$

- si nous connaissons le vecteur vitesse $\vec{V}_0\left(V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}\right)$ d'un mobile, à un instant particulier t_0, et l'expression temporelle de son accélération $\vec{a}(t)\left(a_x(t), a_y(t), a_z(t)\right)$, il est possible de déterminer sa vitesse à n'importe quel instant t, en écrivant :

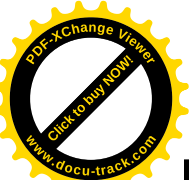
$$\begin{aligned} V_x(t) &= V_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \\ V_y(t) &= V_{y0} + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt \\ V_z(t) &= V_{z0} + \int_{t_0}^{t} a_z(t)\,dt \end{aligned} \qquad \text{(II.45)}$$

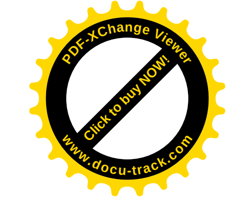
III.6. Approximation des grandeurs instantanées à l'aide des grandeurs moyennes

Comme pour le mouvement rectiligne, si $\Delta t = t_f - t_i$ est suffisamment petit on peut confondre :

- la vitesse moyenne $\left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f}$ avec la vitesse instantanée $\vec{V}_m(t)$ au milieu de l'intervalle de temps $\left[t_i, t_f\right]$;
- l'accélération moyenne $\left(\vec{a}_m\right)_{t_i}^{t_f}$ avec l'accélération instantanée $\vec{a}(t)$ au milieu de l'intervalle de temps $\left[t_i, t_f\right]$. Soit

$$\Delta t = t_f - t_i < \varepsilon\,(\text{petit}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(t) = \left(\vec{V}_m\right)_{t_i}^{t_f} \\ \vec{a}(t) = \left(\vec{a}_m\right)_{t_i}^{t_f} \end{cases} \quad \text{avec } t = \frac{t_f + t_i}{2}$$







III.7. Abscisse, vitesse et accélération curvilignes

Si la trajectoire d'un mobile M est connue on peut:

- l'orienter dans un sens arbitraire ;
- choisir un point origine M_0, fixe, sur cette trajectoire ;
- choisir une unité graphique.

La valeur algébrique de l'arc $(\overset{\frown}{M_0M})$ est **l'abscisse curviligne *s*** du point M

Exemple: Sur une carte routière les distances sont déterminées à partir des abscisses curvilignes. L'origine est le point kilométrique zéro et l'unité le kilomètre.

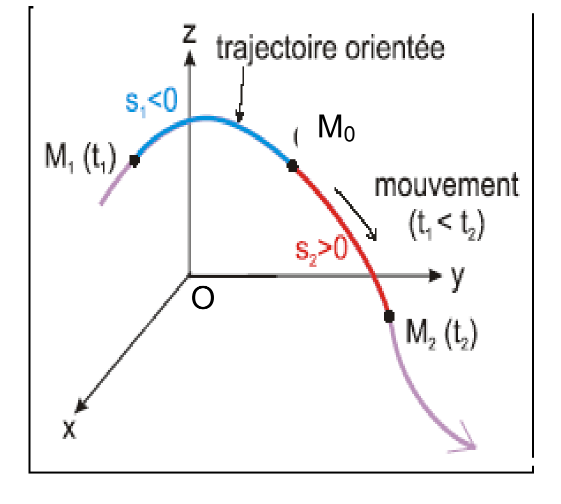


Figure II.23

On définit, respectivement, la vitesse et l'accélération curvilignes par les relations :

$$V(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{II.46}$$

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} \tag{II.47}$$

Exemple:

Mouvement circulaire varié sur une trajectoire de rayon R:

$$s = R\theta \quad ; \quad V = R\frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad a = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

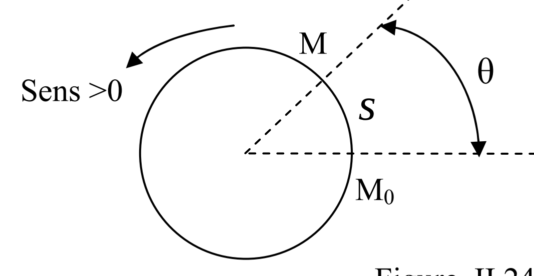


Figure II.24

III.8. Composantes intrinsèques de l'accélération

a. Définitions

Dans certains cas, pour déterminer l'accélération en un point M, on utilise ses composantes intrinsèques qui sont ses projections algébriques (figure II.25):

- a_t sur un axe tangentiel (MT) muni du vecteur unitaire $\vec{u}_t$, dirigé dans le sens du mouvement.

- a_n sur un axe normal (MN) muni du vecteur unitaire $\vec{u}_n$, orienté vers le côté concave de la trajectoire.

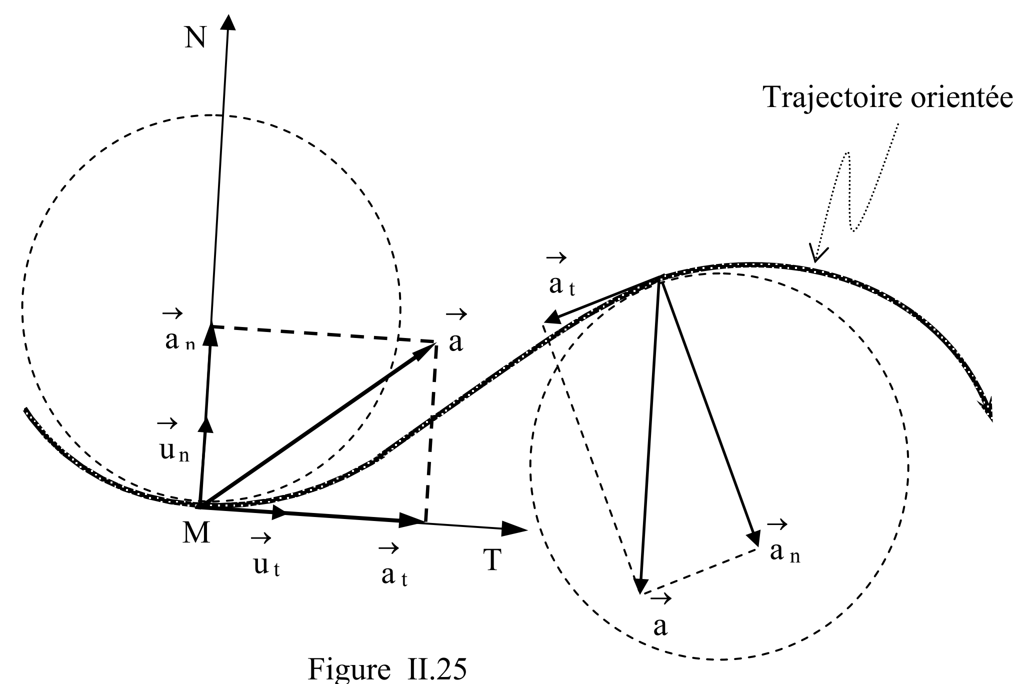


Figure II.25

D'où l'expression

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ &= a_t\,\vec{u}_t + a_n\,\vec{u}_n \end{aligned} \qquad \text{(II.48)}$$

a_t et a_n sont, respectivement, les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

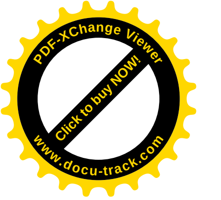
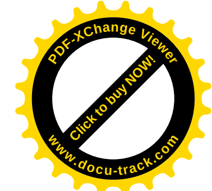
Remarque: les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ forment une base orthonormée appelée base de Frenet. C'est une base de projection (ou repère) liée à la position M du mobile. En physique il ne faut pas confondre cette notion avec celle de référentiel qui, lui, est lié à un observateur.

b. Expressions des composantes tangentielle et normale de l'accélération

Comme le vecteur vitesse est tangentiel, il s'écrit dans le repère de Frenet :

$$\vec{V} = V\,\vec{u}_t$$

V étant le module. Dérivons cette expression par rapport au temps pour trouver l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_t + V\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

Notons que

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Rappelons que

$$\frac{ds}{dt} = V$$

Les vecteurs de la base de Frenet forment en permanence une base orthonormale et leurs dérivées vérifient un certain nombre de relations. Notamment, on l'admettra :

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_n$$

ρ(*s*) est appelé **rayon de courbure de la trajectoire au point considéré** . Si la trajectoire est suffisamment régulière, il y a toujours un cercle et un seul qui lui est tangent ; ρ est alors son rayon .

Il en résulte l'expression explicite suivante de l'accélération

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{dV}{dt}\vec{u}_t + \frac{V^2}{\rho}\vec{u}_n \\ &= a_t\,\vec{u}_t + a_n\,\vec{u}_n\end{aligned} \qquad \text{(II.49)}$$

Interprétation:

- $a_t = \dfrac{dV}{dt}$ indique que la composante tangentielle est liée au **changement du module de la vitesse**, c'est-à-dire si l'objet se déplace plus vite ou moins vite.

- $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$ la présence de ρ signifie que la composante normale indique que la trajectoire est courbe. En conséquence, **la direction du vecteur vitesse varie**.

Exemples:

- Mouvement rectiligne varié : **rectiligne** signifie qu'il n'y a pas de variation de la direction du vecteur vitesse. Dans ce cas **le rayon de courbure** ρ de la trajectoire est **infini** et de ce fait $a_n = 0$. **Varié** veut dire $a_t \neq 0$.

- Mouvement circulaire uniforme : **circulaire** signifie que le mobile se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon R = ρ. De ce fait $a_n = \frac{V^2}{R} \neq 0$. **Uniforme** veut dire $a_t = 0$.

- **Compléments:**

α) le rayon de courbure en un point P de la trajectoire

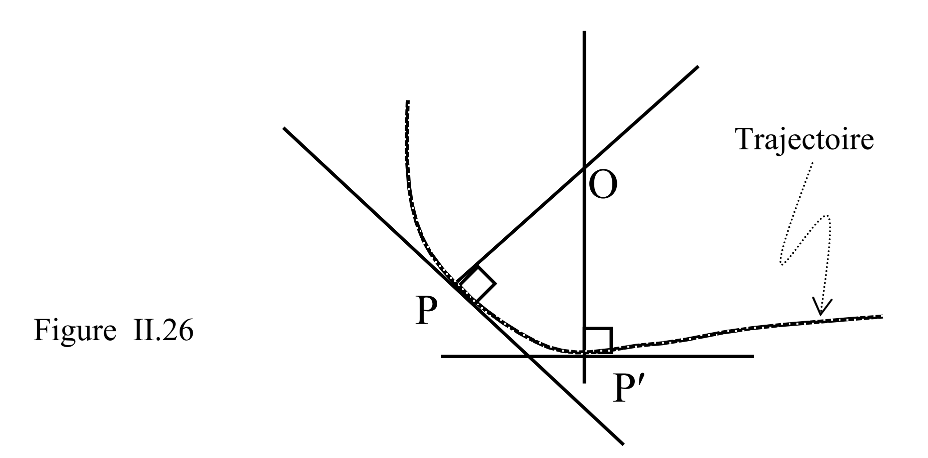


Figure II.26

Soient P′ un point voisin de P et O le point d'intersection des normales à la trajectoire, en P et P′. Le rayon de courbure, ρ, est égal à la limite de la distance (OP) lorsque P′ tend vers P.

β) nature du mouvement

- $\rho = \text{constante}$: le mouvement est circulaire ;
- $a_t = 0$: le mouvement est uniforme ;
- $a_t = \text{constante}$: le mouvement est uniformément varié ;
- $a_t > 0$: le mouvement est accéléré (uniformément si $a_t = \text{constante}$) ;
- $a_t < 0$: le mouvement est décéléré ou retardé (uniformément si $a_t = \text{constante}$).

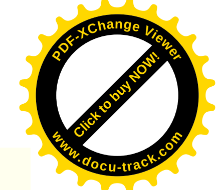
Exercice : Montrer que le mouvement décrit par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \cos t^2 \;\; (m) \\ y(t) = \sin t^2 \;\; (m) \end{cases}$$

dans le système de coordonnées cartésiennes (O, x, y) est circulaire uniformément accéléré.

Réponse : Remarquons que $x^2 + y^2 = \left(\cos t^2\right)^2 + \left(\sin t^2\right)^2 = 1$. La trajectoire est alors un cercle centré en O et de rayon R=1m.

Le vecteur vitesse a pour composantes

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = -2t\sin t^2 \ (m/s) \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t\cos t^2 \ (m/s) \end{cases}$$

et pour module

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4t^2\left(\left(\cos t^2\right)^2 + \left(\sin t^2\right)^2\right)} = 2t \ \ (m/s)$$

L'accélération aura pour composantes intrinsèques:

$$\vec{a}\begin{cases} a_t = \dfrac{dV}{dt} = 2 \ (m/s^2) \\ a_n = \dfrac{V^2}{R} = 4t^2 \ (m/s^2) \end{cases}$$

Finalement la composante tangentielle de l'accélération est constante et positive. Le mouvement est alors uniformément accéléré.

III.9. Etude du mouvement en coordonnés polaires

a. Définition

Ce système de coordonnées est approprié pour étudier les mouvements plans à symétrie de rotation. Le repérage s'effectue relativement à un axe polaire (Ox), d'origine O appelée pôle. On peut alors repérer la position de tout point M du plan contenant (Ox) par :

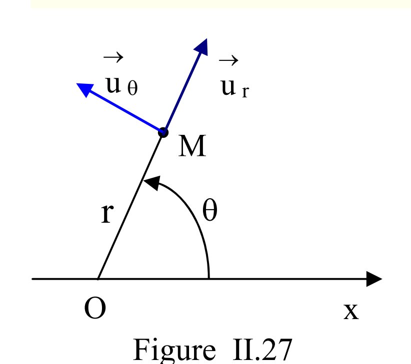


Figure II.27

- le rayon polaire $r(t) = \left|\overrightarrow{OM}(t)\right|$ (II.50)
- l'angle polaire $\theta(t) = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ (II.51)

qui peuvent varier avec le temps. Notons que le rayon r et l'angle θ (tels que définis dans la figure II.27) sont positifs.

b. La base

Dans ce système on utilise la base constituée par les vecteurs unitaires :

- $\vec{u}_r$ ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$;
- $\vec{u}_\theta$ obtenu par rotation de $\vec{u}_r$ d'un angle $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.

La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est liée au point M, et de ce fait les directions des vecteurs unitaires peuvent varier avec le temps. Leurs dérivées vérifient un certain nombre de relations, notamment, on l'admettra :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r \qquad (II.52)$$

c. Lien avec les coordonnées cartésiennes

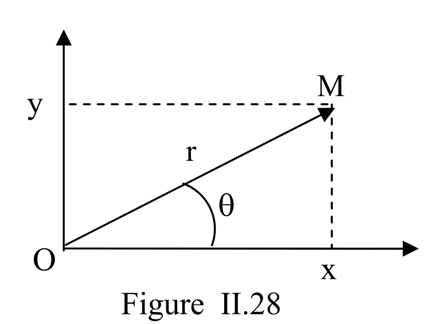


Figure II.28

Les coordonnées polaires r et θ du point M sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (II.53)$$

d. Vecteurs position, vitesse et accélération

- **Vecteur position:**

Les définitions de r(t) et de $\vec{u}_r$ nous permettent d'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r \qquad (II.54)$$

- **Vecteur vitesse:**

Par définition

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(t)\,\vec{u}_r(t)\right)$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$= V_r\,\vec{u}_r + V_\theta\,\vec{u}_\theta$$

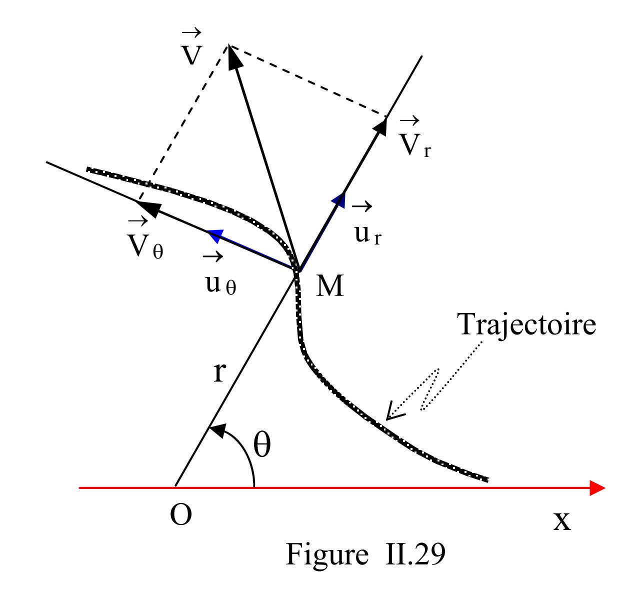
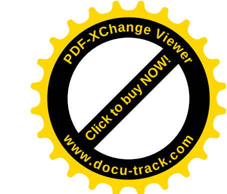


Figure II.29

On peut y identifier les composantes de la vitesse :

$$\vec{V}\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} : \quad \text{composante radiale} & (II.55) \\ V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} : \quad \text{composante transversale} & (II.56) \end{cases}$$





- **Vecteur accélération:**

On obtient son expression par dérivation du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r\right)$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

$$= a_r\,\vec{u}_r + a_\theta\,\vec{u}_\theta$$

Par identification on obtient :

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 : \text{composante radiale} & \text{(II.57)} \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} : \text{composante transversale} & \text{(II.58)} \end{cases}$$

III.10. Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

Lorsqu'un mouvement a lieu sur une surface cylindrique ou en spirale, on utilise souvent les coordonnées cylindriques que l'on définit par rapport au système cartésien. Le mobile M est alors repéré par

- les coordonnées polaires r et θ de sa projection « m » sur le plan (O, x, y) ;
- sa coordonnée axiale z.

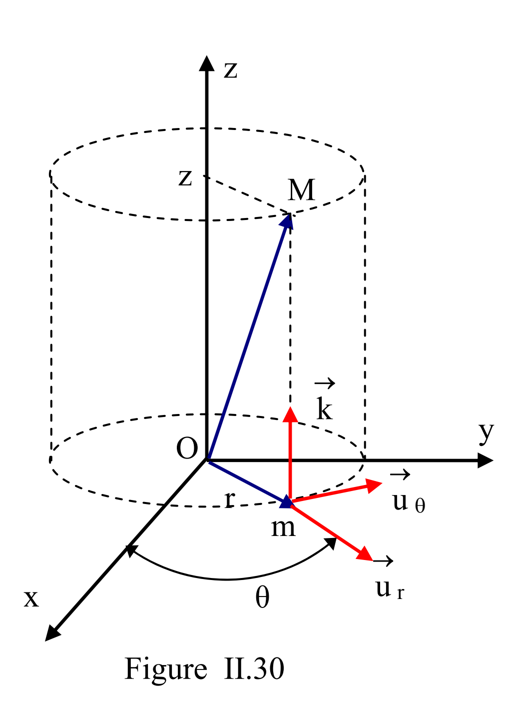
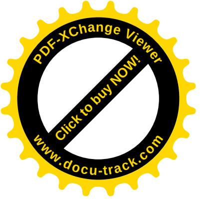


Figure II.30

Les coordonnées cylindriques ne sont qu'une extension des coordonnées polaires au cas tridimensionnel. Dans ce système, les grandeurs cinématiques vectorielles, $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}$ et $\vec{a}$ sont définies par les composantes polaires de leurs projections sur le plan (O,x,y), complétées par leurs composantes axiales. On obtient alors pour :




- **le vecteur position:**

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k} \qquad \text{(II.59)}$$

- **le vecteur vitesse:**

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \text{(II.60)}$$

soit

$$\vec{V}\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} : \quad \text{composante} \quad \text{radiale} & \text{(II.61)} \\ V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} : \quad \text{composante} \quad \text{transversale} & \text{(II.62)} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} : \quad \text{composante} \quad \text{axiale} & \text{(II.63)} \end{cases}$$

- **le vecteur accélération:**

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k} \qquad \text{(II.64)}$$

soit

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 : \text{composante radiale} & \text{(II.65)} \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} : \text{composante transversale} & \text{(II.66)} \\ a_z = \ddot{z} : \text{ composante axiale} & \text{(II.67)} \end{cases}$$

III.11. Complément sur le mouvement circulaire

a. Vecteur position

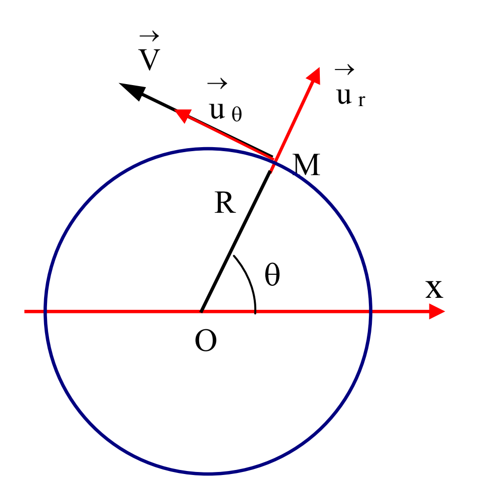


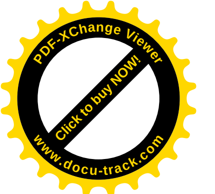
Figure II.31

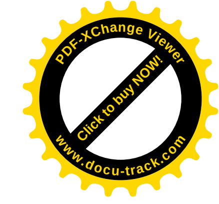
La trajectoire étant un cercle, le mobile peut être repéré par les coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} r(t) = R = \text{constante} \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \qquad \text{(II.68)}$$

et

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r$$





b. Vecteur vitesse

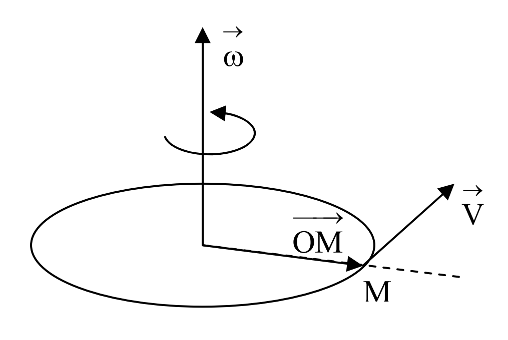


Figure II.32

Les composantes s'obtiennent à partir des expressions générales en coordonnées polaires :

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$
$$= R\omega\,\vec{u}_\theta$$
$$= V\,\vec{u}_\theta \qquad \text{(II.69)}$$

- V est la vitesse curviligne lorsque la trajectoire est orientée dans le sens de θ.
- $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire du mouvement. Elle est reliée à la vitesse curviligne par la relation $V = R\omega$ et **son unité est le rd/s.**

Dans le cas où la trajectoire est dans le plan (O, x, y), en remarquant que $\vec{u}_\theta = \vec{k}\times\vec{u}_r$, la relation (II.69) devient alors :

$$\vec{V} = R\omega\left(\vec{k}\times\vec{u}_r\right) = \left(\omega\vec{k}\right)\times\left(R\,\vec{u}_r\right) = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}$$

Ainsi, dans un mouvement circulaire on représente la vitesse angulaire par un vecteur de module égal à $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ et tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{V}, \vec{\omega}\right)$ soit direct (voir figure II.32).

c. Vecteur accélération

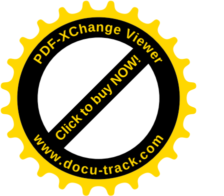
Utilisons l'expression générale de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \qquad \text{(II.70)}$$

En tenant compte du fait que $r = R$, on obtient

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$
$$= -R\omega^2\,\vec{u}_r + R\alpha\,\vec{u}_\theta \qquad \text{(II.71)}$$

$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire. Elle est reliée à la composante transversale du vecteur accélération par la relation : $a_\theta = R\alpha$ et **son unité est le rd/s²**.




d. Passage de l'accélération angulaire à la vitesse angulaire et à l'angle polaire

Par définition,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \int d\omega = \int \alpha \, dt$$

Par conséquent, si nous connaissons la vitesse angulaire ω_0 d'un mobile, à un instant particulier t_0, et l'expression temporelle de son accélération angulaire $\alpha(t)$, il est possible de déterminer sa vitesse angulaire à n'importe quel instant t, en écrivant :

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt \qquad \text{(II.72)}$$

De la même façon, on peut passer de la vitesse angulaire à l'angle polaire en écrivant :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \int d\theta = \int \omega \, dt$$

Ainsi, si nous connaissons la position θ_0 d'un mobile, à un instant particulier t_0, et l'expression temporelle de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, il est possible de déterminer sa position à n'importe quel instant t, en écrivant :

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega \, dt \qquad \text{(II.73)}$$

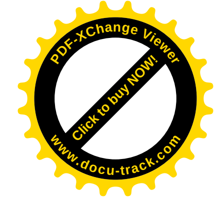
Exemple: Un mobile est animé d'un mouvement circulaire d'accélération angulaire $\alpha = 2rd/s^2$. Sachant qu'à l'instant $t = 0s$ $\omega_0 = 1rd/s$ et $\theta_0 = 2rd$, déterminer les autres caractéristiques du mouvement, soit $\omega(t)$ et $\theta(t)$.

L'utilisation des relations précédentes donne lieu à :

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt = 1 + \int_0^t 2\,dt = 2t + 1\,(rd/s)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt = 2 + \int_0^t (2t+1)\,dt = t^2 + t + 2\,(rd)$$





e. Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

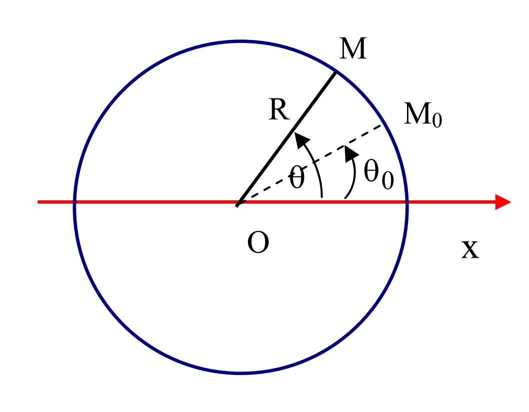


Figure II.33

C'est le mouvement circulaire d'un mobile qui, à $t = 0s$ se trouve en $M_0(R, \theta_0)$, et tourne à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante.

Circulaire $\Rightarrow$ $R = cte$

Uniforme $\Rightarrow \begin{cases} V = cte \\ \omega = cte \end{cases}$

Ce mouvement est périodique, c'est-à-dire que le mobile passe en un point quelconque de la trajectoire à intervalles de temps égaux. Il est caractérisé par :

- la période T qui est le temps nécessaire pour faire un tour complet ;
- la fréquence f qui est le nombre de tours par unité de temps.

Il existe une relation simple entre la vitesse angulaire et la période. Le premier tour est accompli au bout de la période T. Il vient :

$$\theta(T) = \theta_0 + \int_0^T \omega\, dt = \theta_0 + \omega \int_0^T dt = \theta_0 + \omega T$$

Après un tour complet, l'angle θ_0 a augmenté de 2π, ce qui nous permet d'écrire :

$$\theta(T) - \theta_0 = 2\pi = \omega T$$

Ce qui nous donne la relation

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(II.74)}$$

Comme le mobile effectue un tour par période de temps, la fréquence est alors :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(II.75)}$$



III.12. Le mouvement harmonique simple

a. Introduction

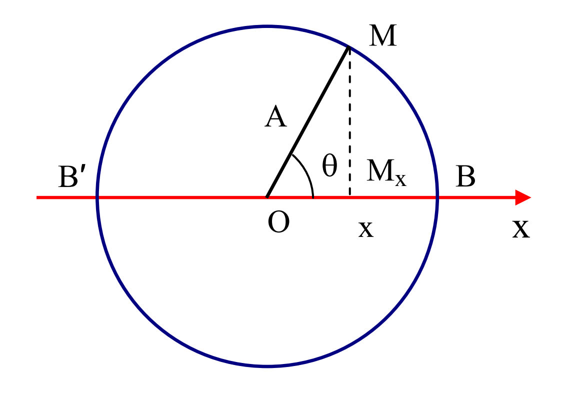


Figure II.34

Considérons un point M qui de déplace sur un cercle de rayon A à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante. Lorsque M se déplace sur sa trajectoire, sa projection, M_x, sur l'axe (Ox), effectue des oscillations sur le segment B′B centrées en O.

La figure II.34 montre que M_x a pour abscisse :

$$x = A\cos\theta$$

Par ailleurs, on détermine la valeur de l'angle $\theta(t)$ en écrivant :

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\int_0^t dt = \theta_0 + \omega t$$

soit :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(II.76)}$$

avec $\varphi = \theta_0$.

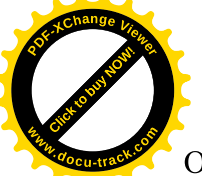
Le mouvement de M_x est un mouvement harmonique simple; ses caractéristiques sont :

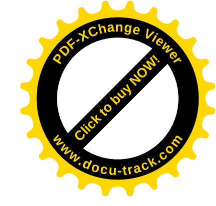
- A : l'amplitude;
- ω : la pulsation ou la fréquence angulaire;
- $\omega t + \varphi$: la phase;
- φ : la phase initiale.

b. Propriétés du mouvement harmonique simple

Rappelons que :

$$\begin{aligned}\cos(\omega t + \varphi) &= \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) \\ &= \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right)\end{aligned}$$





On en conclut que :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right)$$

soit

$$x(t) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

Ce qui revient à dire que ce mouvement harmonique est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Sa vitesse et son accélération s'obtiennent en écrivant :

- pour la vitesse: $v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$; (II.77)
- pour l'accélération: $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$. (II.78)

c. Représentations graphiques

Remarquons que :

- $x = A\cos(\omega t + \varphi)$
- $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui fait apparaître un déphasage

de $\frac{\pi}{2}$ de la vitesse par rapport à $x(t)$.

- $a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$, donc le déphasage entre l'accélération et x(t) est

égal à π.

Remarque: un déphasage de π rad est équivalent à $\frac{\pi}{2\pi}T = \frac{T}{2}(s)$. En conséquence, les déphasages entre la vitesse et l'accélération par rapport à x(t), mesurés en termes de période, sont alors respectivement $\frac{T}{4}(s)$ et $\frac{T}{2}(s)$

Exemple : cas où M_x passe à t=0s par O dans le sens positif (v>0).

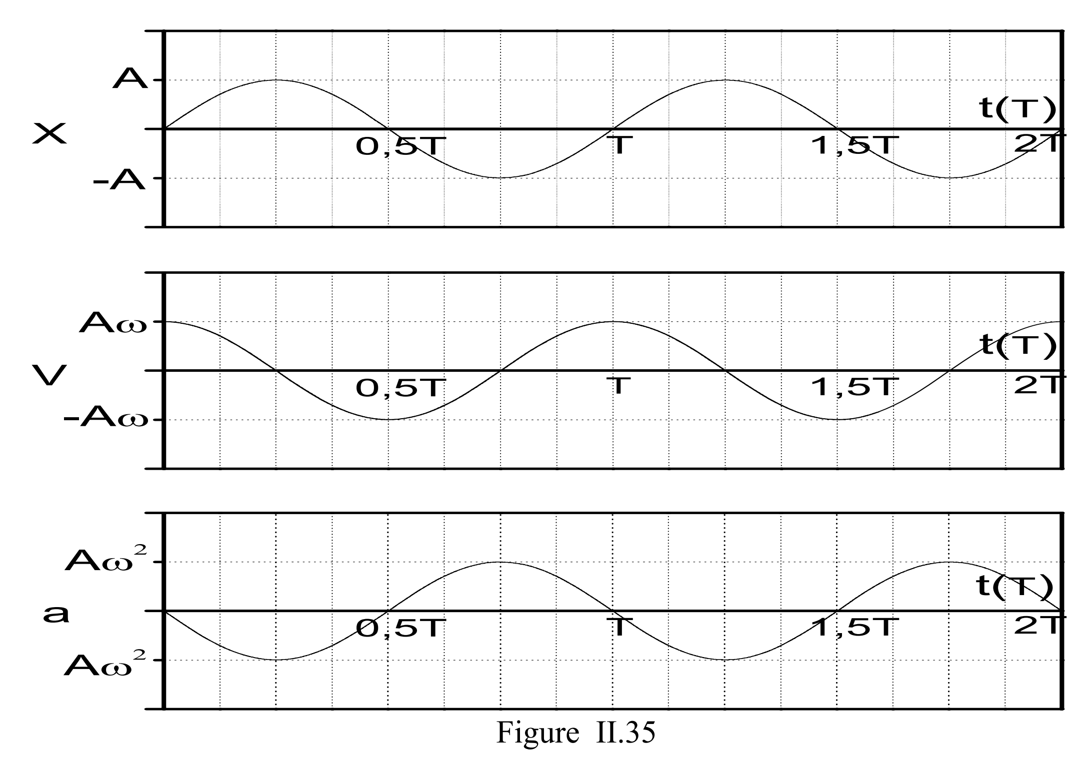


Figure II.35

Le cercle, trajectoire du mouvement de M, est parfois appelé **cercle de référence**. Il est utile car il permet de trouver les expressions pour la vitesse et l'accélération en projetant sur l'axe Ox les vecteurs vitesse et accélération. En effet, si $\vec{V}_M$ et $\vec{A}_M$ sont la vitesse et l'accélération de M, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont la vitesse et l'accélération de M_x, (voir la figure II.36),

on a

$$\left.\begin{array}{l} M_x \text{ est la projection de } M \\ \vec{v} \text{ est la projection de } \vec{V}_M \\ \vec{a} \text{ est la projection de } \vec{A}_M \end{array}\right\} \text{sur } (Ox)\ .$$

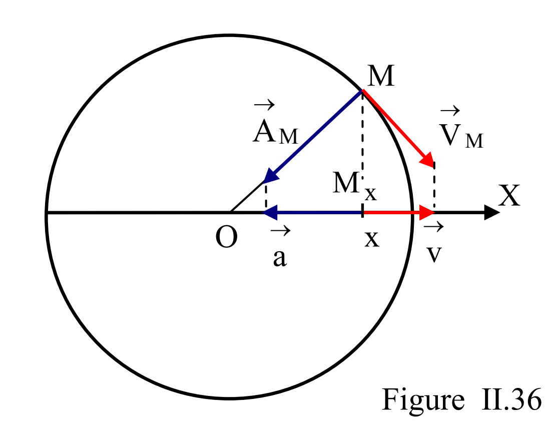
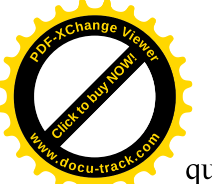


Figure II.36

III.13. Le mouvement relatif

a. Introduction

Nous avons jusqu'ici considéré des référentiels fixes, dont les vecteurs de base ne varient pas avec le temps. Or deux référentiels peuvent être en mouvement relatif, soit parce



que leurs origines se déplacent l'une par rapport à l'autre, soit parce que l'orientation relative des deux référentiels change avec le temps, soit les deux. Nous nous proposons, dans ce cas, de considérer le problème de la détermination des caractéristiques d'un mouvement par rapport à l'un des référentiels lorsqu'il est connu dans l'autre référentiel.

Pour ce faire, nous considérerons un mobile M et les deux systèmes de coordonnées cartésiennes suivants :

- $\Re(O, x, y, z)$, supposé fixe, qui est appelé **repère absolu ;**
- $\Re'(O', x', y', z')$, en mouvement quelconque par rapport à $\Re$, qui est le **repère relatif.**

b. Le mouvement absolu

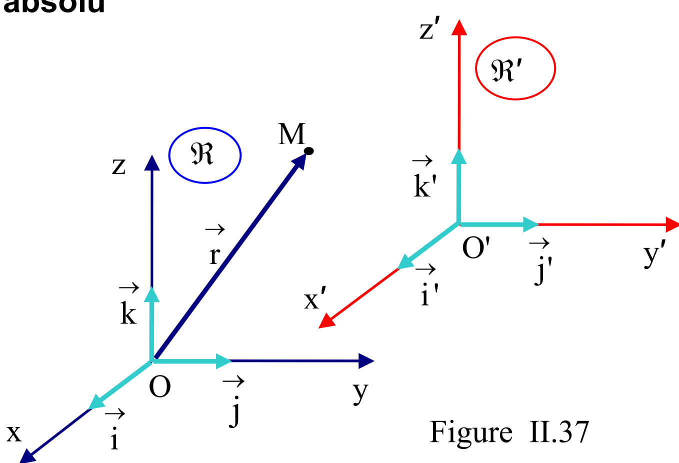


Figure II.37

Le mouvement de M considéré par rapport au repère absolu $\Re(O, x, y, z)$ est caractérisé par les grandeurs :

- **le vecteur position**

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \tag{II.79}$$

- **la vitesse absolue**

$$\vec{V}_a(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{II.80}$$

- **l'accélération absolue**

$$\vec{a}_a(t) = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{II.81}$$

Remarque : les dérivations sont effectuées dans $\Re$ dans lequel la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est invariable.

c. Le mouvement relatif

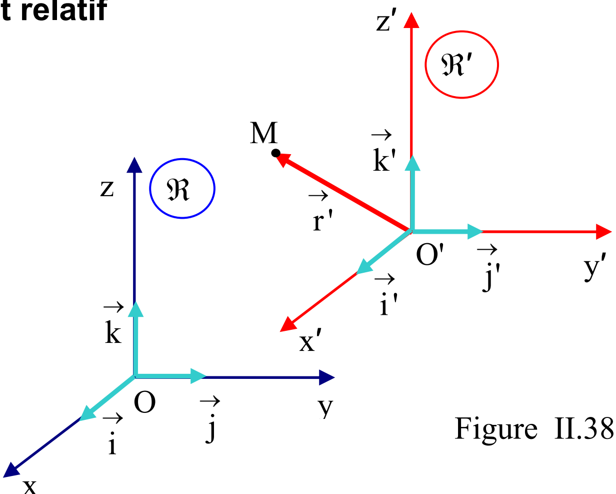


Figure II.38

Le même mouvement, considéré par rapport au repère relatif ℜ′ (O′, x′, y′, z′), est caractérisé par les grandeurs :

- **le vecteur position**

$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{i}\,' + y'\,\vec{j}\,' + z'\,\vec{k}\,' \qquad \text{(II.82)}$$

- **la vitesse relative**

$$\vec{V}_r(t) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re'} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,' \qquad \text{(II.83)}$$

- **l'accélération relative**

$$\vec{a}_r(t) = \left.\frac{d\,\vec{V}_r}{dt}\right|_{\Re'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,' \qquad \text{(II.84)}$$

Remarque: les dérivations sont effectuées dans ℜ′ dans lequel la base $(\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est invariable.

d. Composition des vecteurs vitesses

Par définition, la vitesse absolue du point M est :

$$\vec{V}_a(t) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re}$$

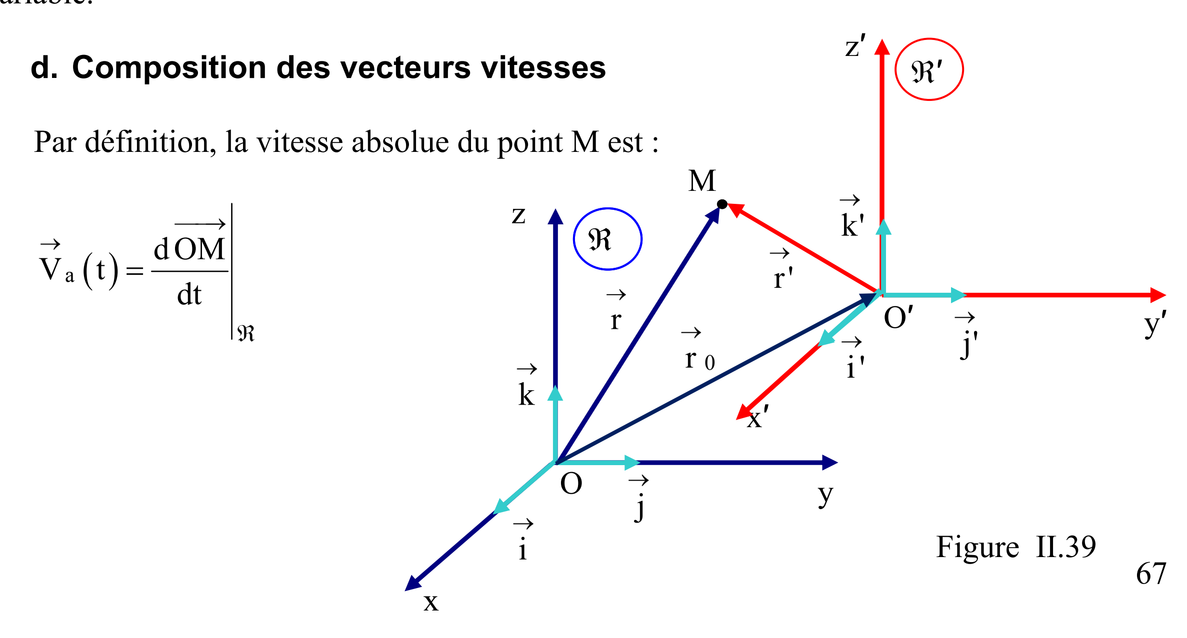
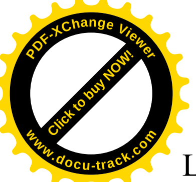
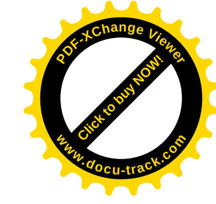


Figure II.39

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Soit :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad \text{avec} \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Si on dérive par rapport au temps, en tenant compte du fait que la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ peut varier dans $\mathfrak{R}$, on obtient :

$$\vec{V}_a(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathfrak{R}} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

En réarrangeant les termes on obtient :

$$\vec{V}_a(t) = \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) \qquad \text{(II.85)}$$

$$= \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

La grandeur $\vec{V}_e = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ est appelée **vitesse d'entraînement** et représente la vitesse du repère $\mathfrak{R}'$ par rapport au repère $\mathfrak{R}$. Plus précisément il s'agit de la vitesse absolue d'un point A, fixe dans le référentiel $\mathfrak{R}'$, coïncidant avec la position de M au temps t considéré. Son expression comprend deux termes:

- $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{V}_a(O')$ représente la vitesse de translation de l'origine O′ par rapport à $\mathfrak{R}$.

- $x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ traduit le changement d'orientation du référentiel mobile $\mathfrak{R}'$.

Théorème de composition des vitesses:

Le vecteur vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs vitesses d'entraînement et relative:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \qquad \text{(II.86)}$$

e. Composition des vecteurs accélérations

Si on dérive le vecteur vitesse absolue par rapport au temps, on obtient le vecteur accélération absolue $\vec{a}_a$ défini dans le repère $\Re$:

$$\vec{a}_a(t) = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]$$

$$= \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right) \qquad \text{(II.87)}$$

$$+2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

Cette expression fait apparaître trois termes :

- $\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$ est l'accélération d'entraînement,

représentant l'accélération du point coïncidant A par rapport au repère absolu $\Re$.

- $\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}$ est l'accélération relative.

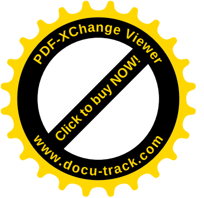
- $\vec{a}_e = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$ est une accélération complémentaire, dite

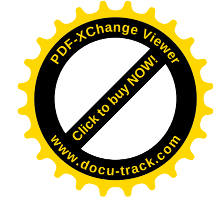
accélération de Coriolis

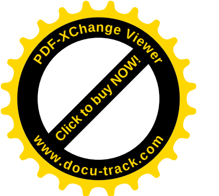
Théorème de composition des accélérations:

Le vecteur accélération absolue est égal à la somme des vecteurs accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad \text{(II.88)}$$











DYNAMIQUE D'UNE PARTICULE

Dans le chapitre précédent, consacré à la cinématique, nous avons effectué une description géométrique du mouvement sans nous préoccuper des agents qui en sont la cause. Dans cette partie, nous abordons **la dynamique** qui **est la partie de la mécanique qui traite des causes du mouvement.** Elle permet de déterminer les causes d'un mouvement connu et de prédire le mouvement pour des causes données. En somme, il s'agit d'établir les relations entre les deux.

I. CONCEPT DE FORCE

I.1. Notion de force

Nous savons, par expérience, que le mouvement d'une particule est déterminé par la nature et la disposition des corps qui l'entourent, c'est-à-dire son environnement. Ainsi, le mouvement est le résultat de l'interaction entre la particule et son environnement. Cette interaction, appelée **force**, est caractérisée par les propriétés de la particule (masse, charge, moment dipolaire …) et par la nature de l'environnement dans lequel elle est placée.

Nous avons vu qu'en physique, la force est, intuitivement, perçue comme une grandeur qui traduit les interactions entre les objets. C'est une cause capable de produire ou de modifier le mouvement d'un corps, ou d'engendrer sa déformation. Il est possible de classer les forces en forces de contact ou actions à distance.

- Il y a **force de contact** lorsqu'elle traduit une interaction entre deux corps en contact physique. Les forces de contact comprennent, par exemple :

  - les "forces de frottement" : les forces de frottement apparaissent lorsque deux corps en contact sont en mouvement relatif, l'un par rapport à l'autre. Elles s'opposent toujours au mouvement du corps considéré.

  - les "forces de tension" exercées sur un corps : ce sont des forces qui tirent sur un élément d'un corps comme par exemple, la tension exercée par un fil ou par un ressort.

- Les "**forces à distance**" : ce sont des forces qui peuvent se manifester même s'il n'y a pas de contact physique entre les deux corps qui interagissent. Ces forces interviennent par l'intermédiaire de champs vectoriels comme par exemple :

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

- les forces de gravitation : ce sont des forces d'attraction qui s'exercent entre des corps et qui sont dues à leurs masses. Le poids d'un corps et les forces échangées par les astres sont essentiellement des forces de gravitation.

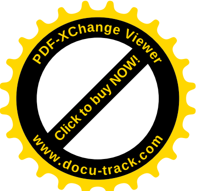
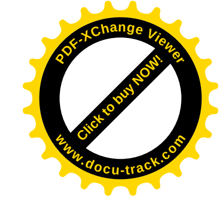
- les forces électriques : elles s'exercent entre deux objets portant des charges électriques. Elles peuvent être aussi bien attractives que répulsives.

- les forces magnétiques : elles s'exercent entre des aimants, entre des aimants et certains matériaux (en particulier le fer) ou bien entre deux conducteurs parcourus par un courant électrique. Elles, aussi, peuvent être attractives ou répulsives.

Le tableau III.1 présente des exemples d'interactions.

Interaction	Particule	Environnement
m	masse	ressort + mur + surface du support
	projectile	terre
-q +Q	charge négative	charge positive
N S	morceau de fer	aimant

Tableau III.1

I.2. Le vecteur force

Toute force peut être représentée par un vecteur $(\vec{F})$ dont les quatre propriétés sont

- la direction : droite selon laquelle l'action s'exerce (celle du fil de la Figure III.1) ;
- le sens : sens selon lequel s'exerce l'action (de A vers B, voir Figure III.1) ;
- le point d'application : point où l'action s'exerce sur le corps (le point A) ;
- le module : l'intensité de la force à laquelle est associée une unité adéquate.

Les forces sont additives, c'est-à-dire que si N forces agissent simultanément sur un corps, le mouvement de ce dernier est le même que dans le cas où il subit l'action d'une seule force égale à la somme vectorielle des N forces. Cette somme est appelée **résultante** des N forces.

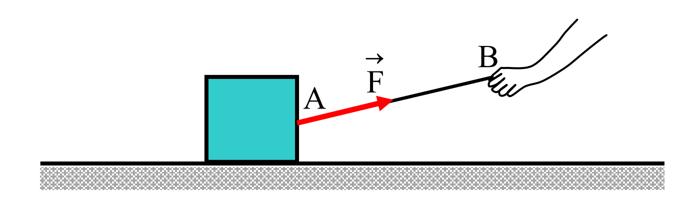


Figure III.1

I.3. Interactions fondamentales

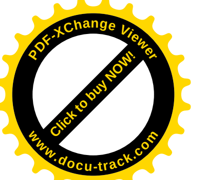
Malgré leur grande diversité, les forces rencontrées dans la nature sont les manifestations des quatre interactions fondamentales :

- **l'interaction gravitationnelle :** elle se manifeste par une force d'attraction entre toutes les particules. Cette force apparaît dans la plupart des phénomènes décrits par l'astronomie et la géologie (le mouvement des astres, la montée des marées ; les corps attirés par la Terre en son voisinage, la non désagrégation de la Terre …).

- **l'interaction électromagnétique :** elle se manifeste entre les charges électriques dans tous les phénomènes faisant intervenir l'électricité et/ou le magnétisme.

- **l'interaction forte :** c'est l'interaction qui s'exerce entre les nucléons qui sont les constituants du noyau d'un atome. Elle permet aux particules composées de quarks, comme les protons et les neutrons, de ne pas se désagréger. Elle s'exerce à très courte distance et est responsable de la cohésion du noyau.

- **l'interaction faible :** elle s'applique à toutes les particules de matière (quarks, électrons, neutrinos, etc...). En particulier, les neutrinos, qui sont électriquement neutres et qui ne sont pas des quarks, ne sont sensibles qu'aux interactions faible et gravitationnelle. L'interaction faible se manifeste dans certains types de réactions nucléaires telles que la radioactivité.



Le tableau III.2, ci-dessous, donne les portées et les intensités relatives des interactions fondamentales.

Interaction	Intensité relative	Portée
Nucléaire forte	1	10^{-15} m
Electromagnétique	10^{-2}	infinie
Nucléaire faible	10^{-6}	10^{-17} m
Gravitationnelle	10^{-38}	infinie

Tableau III.2

II. PRINCIPE D'INERTIE

II.1. Expérience

Considérons la figure III.2 qui représente une collision entre deux particules effectuée dans les conditions de frottements «nuls» sur un plan horizontal. Pour étudier les mouvements, on a réalisé une chronophotographie (décomposition des mouvements à l'aide d'une série de photographies prises à intervalles de temps réguliers) qui est reproduite dans cette figure.

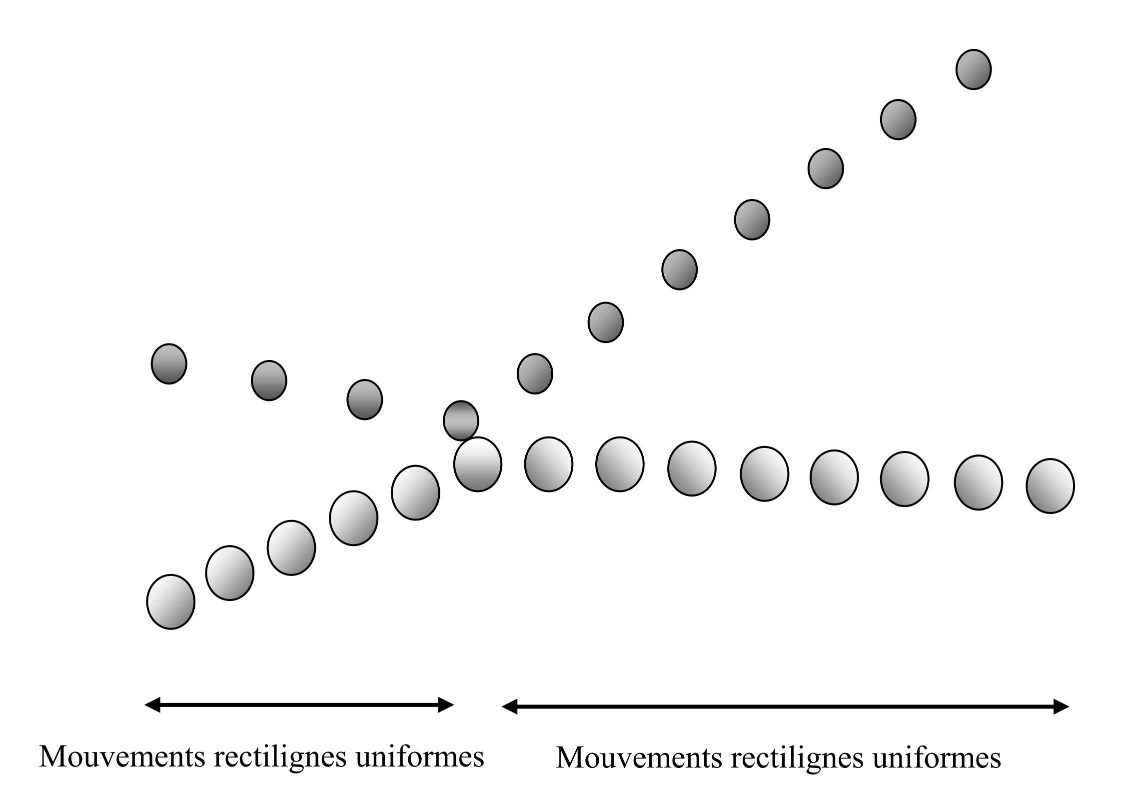


Figure III.2

On peut observer que la trajectoire du centre de chacune des particules est rectiligne et que sa vitesse est constante (les écarts entre les billes sont de même longueur) avant et après le choc. Les forces appliquées sur chacune d'elles dans ces deux zones sont le poids et la force de contact avec le sol (figure III.3).

Comme le mouvement se maintient sur le plan horizontal, cela veut dire qu'aucune des deux forces ne l'emporte sur l'autre et que leur somme vectorielle est nulle

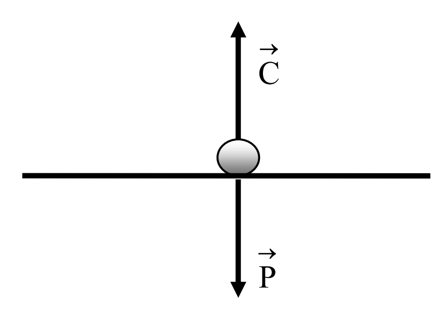


Figure III.3

Désignons par $\vec{F}_C$ la force de contact subie par l'un des deux objets de la part de l'autre lors de la collision (figure III.4). Le bilan des forces qui lui sont appliquées est

$$\underbrace{\vec{P}+\vec{C}}_{0}+\vec{F}_C=\vec{F}_C$$

On constate que, contrairement au cas précédent, la résultante des forces n'est pas nulle durant le choc et que la direction du mouvement a changé.

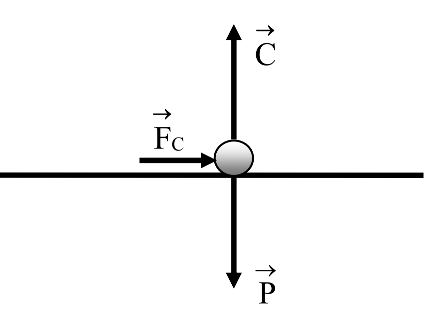


Figure III.4

Notons également que lorsqu'on pose ces objets sur le sol ils restent immobiles tant qu'une action extérieure n'intervient pas pour les déplacer.

Conclusion : ces particules ont conservé leur état de repos ou leurs mouvements rectilignes uniformes tant qu'aucune force n'intervient pour les modifier.

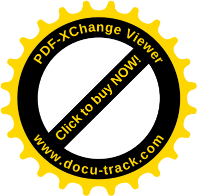
II.2. Enoncé du principe d'inertie

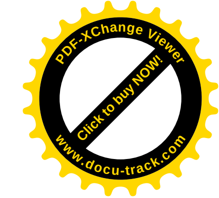
En l'absence de forces externes, un objet au repos reste au repos et un objet en mouvement continue de se déplacer en mouvement rectiligne uniforme.

L'absence de forces externes signifie que la somme vectorielle des forces appliquées est nulle

Corollaire : cette propriété de tous les corps à résister au changement de vitesse est appelée inertie. Tout corps possédant cette propriété a une accélération nulle. On dit que ce corps est doué d'inertie.

Remarque : un grand nombre de faits courants sont des manifestations de l'inertie. Les mouvements des voyageurs provoqués par les véhicules aux démarrages, aux freinages et à l'exécution des virages en sont des exemples.





II.3. Corps isolé mécaniquement

En l'**absence de forces externes**, le corps est dit **libre** ou **isolé mécaniquement**.

On appelle système un ensemble de corps identifiés du reste de l'univers. Un système est **isolé** lorsque la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

Dans certains ouvrages, on dit que les systèmes pour lesquels la somme des forces qui s'exercent sur eux est nulle sont pseudo-isolés, le qualificatif « isolé » étant réservé au cas où ils ne sont soumis à aucune force.

II.4. Référentiel d'inertie ou galiléen

Nous avons vu qu'une particule libre, donc douée d'inertie, doit avoir une accélération nulle. Or l'accélération dépend du système de référence utilisé. Une particule n'est donc libre que par rapport à un référentiel dans lequel elle ne subit pas d'accélération.

Un référentiel d'inertie (ou galiléen) est un référentiel dans lequel un corps qui n'est soumis à aucune force ou qui subit des forces dont la résultante est nulle, sera au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Pour le définir, considérons l'état cinématique d'une particule libre, par rapport à un référentiel en mouvement. Son accélération relative $\vec{a}_r$ est donnée par :

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c \qquad \text{(III.1)}$$

$\vec{a}_a, \vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$ étant, respectivement les accélérations absolues, d'entraînement et de Coriolis.

Si le repère est en mouvement rectiligne uniforme,

- le caractère rectiligne implique

$$\vec{a}_c = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$$

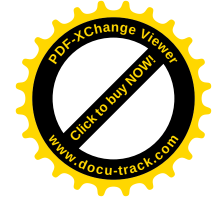
- le caractère uniforme entraîne

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{a}_e = 0$$

La particule étant isolée

$$\vec{a}_a = 0$$

et on obtient





$$\vec{a}_r = 0$$

Ainsi, une particule libre ne subit pas d'accélération dans un repère fixe ou en mouvement rectiligne uniforme. Ce dernier est donc galiléen.

Dans la grande majorité des expériences courantes, un référentiel lié à la terre peut être considéré comme un référentiel d'inertie.

Remarque : En réalité la Terre n'est pas vraiment un référentiel d'inertie, à cause de son mouvement orbital autour du soleil et de sa propre rotation autour de son axe. Cependant, dans le premier mouvement son accélération, dirigée vers le soleil, est de l'ordre de $4,4 \cdot 10^{-3} m/s^2$ et dans le second, un point de l'équateur a une accélération additionnelle, dirigée vers le centre de la terre, d'environ $3,37 \cdot 10^{-2} m/s^2$. Ces deux accélérations, faibles devant celle de la pesanteur, peuvent être négligées.

Illustration : Imaginons un objet posé sur le plateau d'un camion en mouvement rectiligne uniforme. Le corps reste immobile par rapport au véhicule tant que le mouvement de ce dernier garde son caractère rectiligne uniforme. Cependant, si le plateau est suffisamment lisse, le corps glisserait lorsque le camion exécute rapidement son mouvement dans un virage. En effet, le repère lié au camion est alors animé d'un mouvement curviligne et le principe d'inertie n'y est plus applicable. En conséquence, l'objet ne conserverait pas son état de repos par rapport au camion.

II.5. Concept de masse

Jusqu'à ce niveau du cours, nous savons que le mouvement d'une particule est décrit par ses vecteurs position, vitesse et accélération. Cependant, des exemples de la vie courante montrent que ces paramètres cinématiques sont insuffisants pour rendre compte, de façon complète, du comportement du point matériel. Par exemple, imaginons un homme qui fait l'expérience de déplacer le plus rapidement possible une caisse en bois, initialement au repos, sur une distance fixée. Il devra donc accélérer du mieux qu'il peut le mouvement pour augmenter le plus vite possible la vitesse et atteindre son but en un minimum de temps. Il est évident que, dans le cas où il pose une deuxième caisse sur la première, il lui sera plus difficile d'accélérer, donc de modifier la vitesse du mouvement. Ainsi, plus importante est la quantité de matière à déplacer plus grande sera la résistance au changement de la vitesse ou, autrement dit, son inertie sera plus grande.

Il est donc nécessaire d'introduire une grandeur physique mesurant la capacité du corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer. Sachant que la masse d'un corps est proportionnelle à la quantité de matière qui le compose, en conséquence elle est d'autant plus grande que l'inertie de celui-ci est plus importante. **Ainsi, on peut considérer la masse comme une mesure de l'inertie.** C'est-à-dire que plus un objet aura une masse importante et plus il sera difficile de le faire accélérer, ralentir ou changer de direction.

III. LA QUANTITE DE MOUVEMENT

III.1. Définitions

Dans certaines situations, pour étudier l'état d'un corps, il est utile d'introduire des informations sur l'objet lui-même et sur son mouvement. Nous avons vu que, en plus de ses caractéristiques cinématiques, le mouvement peut être influencé par la masse du mobile. Le concept de **quantité de mouvement** fournit une distinction quantitative entre les mouvements de deux particules de même vitesse mais de masses différentes. **C'est la grandeur qui combine une propriété cinématique du mouvement, la vitesse, et la masse.**

La quantité de mouvement $\vec{\mathcal{P}}$ d'une particule est définie comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\vec{\mathcal{P}} = m\,\vec{V} \qquad \text{(III.2)}$$

Pour un système constitué de N particules, on définit sa **quantité de mouvement totale** $\vec{\mathcal{P}}_t$ comme étant la somme vectorielle des quantités de mouvements de chacune des particules.

$$\vec{\mathcal{P}}_t = \sum_{1}^{N} \vec{\mathcal{P}}_i \qquad \text{(III.3)}$$

Ainsi, la quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que la vitesse et a pour unité SI le $kg.m/s$.

L'impulsion $d\vec{\mathcal{P}}$ est le changement de la quantité de mouvement produit dans un court laps de temps donné.

III.2. Conservation de la quantité de mouvement

a. Cas d'une particule

Par définition, un corps isolé est doué d'inertie et, par conséquent, se déplace avec une vitesse constante, ce qui implique qu'il conserve sa quantité de mouvement.

Principe de conservation de la quantité de mouvement : une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante.

b. Système formé de deux particules

La figure III.5 représente une collision entre deux particules réalisée dans les conditions de frottements « nuls » sur un plan horizontal.

Figure III.5

Considérons le système formé par les deux particules. Pour pouvoir lui appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement, il faut que la résultante des forces externes agissant sur lui soit nulle. Vérifions que cette condition est réalisée. Les forces appliquées sur les deux particules sont le poids et la force de contact avec le plan horizontal.

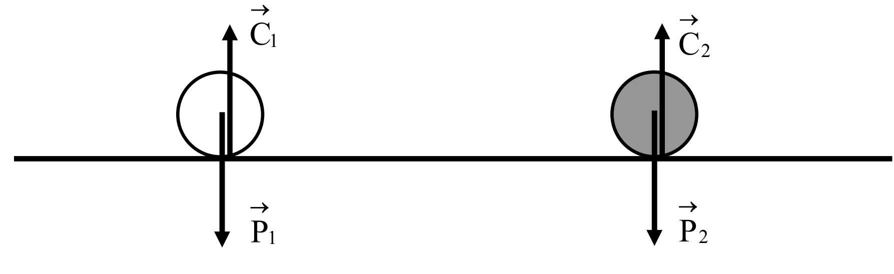


Figure III.6

Comme le mouvement se maintient sur le plan horizontal, cela veut dire qu'aucune des deux forces ne l'emporte sur l'autre et que leur somme vectorielle est nulle. Le bilan des forces extérieures est alors

$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{\vec{P}_1 + \vec{C}_1}_{0} + \underbrace{\vec{P}_2 + \vec{C}_2}_{0} = 0$$

Remarque : Cette relation est également vérifiée durant le choc car la force exercée par m_1 sur m_2 et celle appliquée par m_2 sur m_1 sont des forces internes au système formé par les deux masses.

La résultante des forces externes agissant sur le système étant nulle, nous pouvons lui appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement, soit

$$\underbrace{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}_{\downarrow \; \vec{\mathcal{P}}_t} = \underbrace{m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2'}_{\downarrow \; \vec{\mathcal{P}}_t'} \qquad \text{(III.4)}$$

Puisqu'il s'agit d'une équation vectorielle, la conservation de la quantité de mouvement vaut pour chaque composante :

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V_{1x}' + m_2 V_{2x}' \qquad \text{(III.5)}$$
$$m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = m_1 V_{1y}' + m_2 V_{2y}' \qquad \text{(III.6)}$$

Graphiquement, le principe de conservation de la quantité de mouvement peut être illustré par la figure III.7

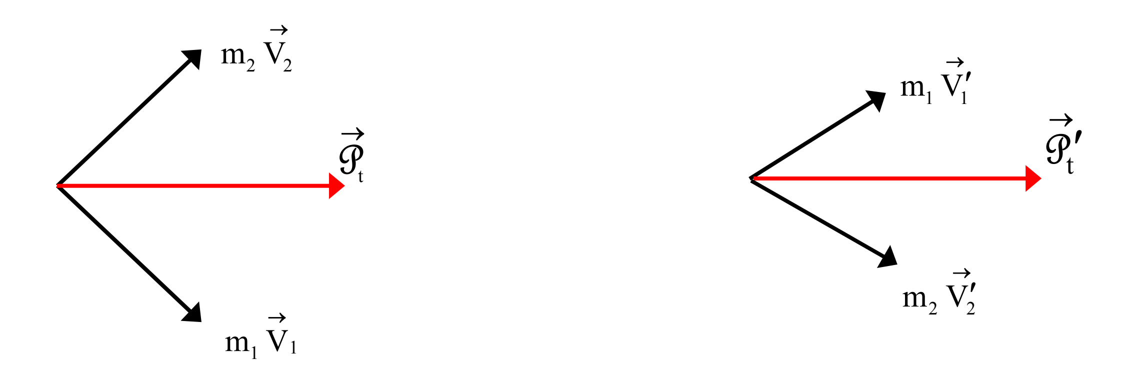
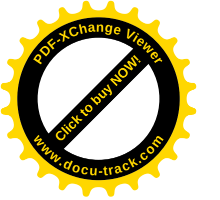
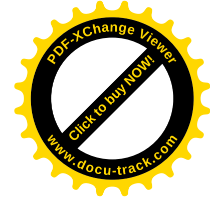


Figure III.7

Principe de conservation de la quantité de mouvement : Ce principe peut être étendu à un système formé d'un nombre quelconque de particules : **La quantité de mouvement totale d'un système isolé de plusieurs particules est constante.**

$$\text{Si} \quad \sum \vec{F}_{ext} = 0, \quad \text{alors} \quad \vec{\mathcal{P}}_t = \sum \vec{\mathcal{P}}_i = \text{constante} \qquad \text{(III.7)}$$

Remarques :

α) la quantité de mouvement de chaque particule peut, dans certains cas, varier mais la quantité de mouvement totale reste constante.

β) le principe de conservation de la quantité de mouvement est valable même à l'échelle des particules élémentaires de la matière.

γ) pour l'exemple du choc de deux particules que nous avons étudié, nous pouvons écrire :

$$\vec{\mathcal{P}}_t = \vec{\mathcal{P}}'_t \Leftrightarrow \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2 = \vec{\mathcal{P}}'_1 + \vec{\mathcal{P}}'_2 \qquad \text{(III.8)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{P}}'_1 - \vec{\mathcal{P}}_1 = -\left(\vec{\mathcal{P}}'_2 - \vec{\mathcal{P}}_2\right) \qquad \text{(III.9)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{\mathcal{P}}_1 = -\Delta\vec{\mathcal{P}}_2 \qquad \text{(III.10)}$$

Ce qui signifie que la quantité de mouvement perdue par l'une des deux particules est gagnée par l'autre. Il s'agit donc d'un échange de quantité de mouvement lors de la collision.

Exemple : Deux blocs A et B, de masses m_A et m_B, sont reliés par un ressort de masse négligeable et reposent sur un plan horizontal. On étire le ressort en éloignant les deux corps l'un de l'autre, puis on les relâche à partir de l'état de repos. Déterminer la relation entre leurs vitesses, en supposant l'absence de frottements.

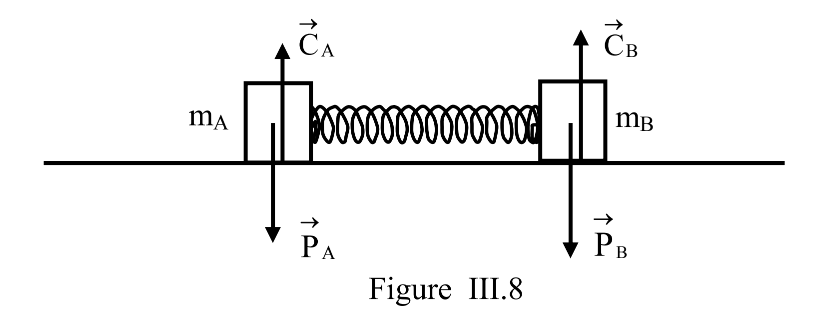
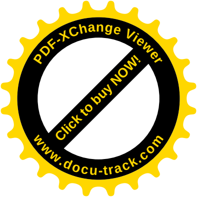


Figure III.8

Si on considère le système constitué par l'ensemble des deux blocs, et en tenant compte du fait que la tension du ressort est une force interne, on aura :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \left(\underbrace{\vec{P}_A + \vec{C}_A}_{0}\right) + \left(\underbrace{\vec{P}_B + \vec{C}_B}_{0}\right) = 0$$

En conséquence, la quantité de mouvement totale se conserve :




$$\left(\vec{\mathcal{P}}_t\right)_{t=0s} = \left(\vec{\mathcal{P}}'_t\right)_{t>0s}$$

soit

$$m_A\,\vec{V}_{A0} + m_B\,\vec{V}_{B0} = 0 = m_A\,\vec{V}'_A + m_B\,\vec{V}'_B$$

d’où

$$\vec{V}'_A = -\frac{m_B}{m_A}\vec{V}'_B$$

IV. LES LOIS DE NEWTON

Les trois lois de Newton sont à la base de la mécanique classique. Ces lois ont été postulées sans démonstration mais elles sont en tel accord avec les expériences que leur validité ne pourrait être mise en doute

IV.1. La première loi : c’est le principe de l’inertie (cf. §II).

IV.2. La deuxième loi

En mécanique newtonienne, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d’un corps est égale à la somme des forces s’exerçant sur celui-ci. Mathématiquement, cela se traduit par la relation :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} \qquad \text{(III.11)}$$

où $\vec{\mathcal{P}}$ est la quantité de mouvement de la particule et $\vec{F}$ la résultante des forces qu’elle subit. Cette égalité, appelée « **relation fondamentale de la dynamique** », est valable tant que la vitesse est très inférieure à celle de la lumière. Remarquons qu’elle associe un terme cinétique, la dérivée du vecteur quantité de mouvement, à un terme dynamique, la somme des forces appliquées sur le point matériel. Elle permet donc de prédire le mouvement si on connait les forces et de déterminer leur résultante pour un mouvement donné.

Cas particulier d’un corps à masse constante : La masse étant constante, la dérivée de la quantité de mouvement s’effectue comme suit :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{0}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\,\vec{a} \qquad \text{(III.12)}$$

ainsi, la "relation fondamentale de la dynamique" (R.F.D.) pour un corps de masse constante est donnée par :

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(III.13)}$$

Remarques :

- $\vec{F}$ représente la résultante des forces extérieures agissant sur le corps considéré ;
- puisqu'il s'agit d'une relation vectorielle, elle vaut pour chaque composante :

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

$$F_z = ma_z$$

- $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ a même orientation que la force résultante.

IV.3. La troisième loi

Lorsque deux corps sont en interaction, ils exercent l'un sur l'autre des forces opposées en sens mais égales en intensité et en direction.

Dans les exemples des figures III.9 et III.10, la force $\vec{F}_{1/2}$, exercée par 1 sur 2, est égale en module et est opposée en sens à la force $\vec{F}_{2/1}$, exercée par 2 sur 1.

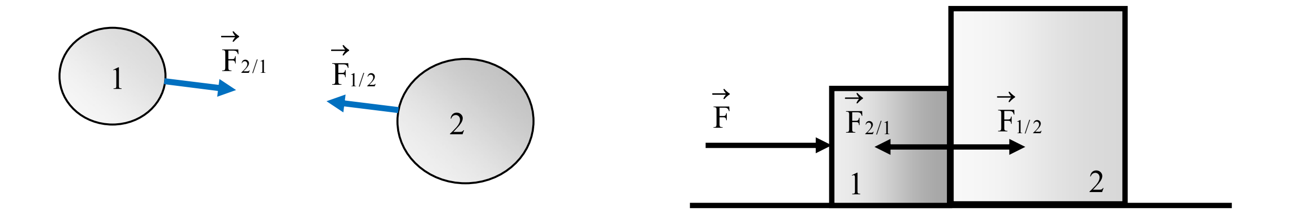
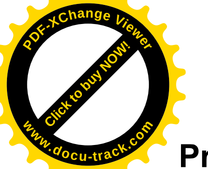
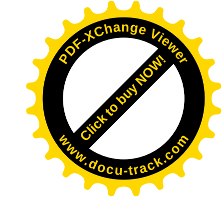


Figure III.9

Figure III.10

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$





Propriétés :

- les deux forces agissent suivant la droite, appelée ligne d'action, joignant les deux corps.

- nous nommons **action** la force exercée par l'un des deux corps et **réaction** celle qui est exercée par l'autre. Cependant, on peut considérer indistinctement que l'une ou l'autre des deux forces est l'action, l'autre devenant alors la réaction.

- les deux forces sont de même nature et n'agissent pas sur le même corps. Ainsi, la force appelée communément réaction (au poids) du sol sur un corps qu'il supporte ne l'est pas au sens de la troisième loi de Newton. En effet, ces forces ne sont pas de même nature et s'appliquent toutes les deux sur le corps posé sur le sol.

- il est impossible de trouver une force qui agit de façon isolée ; toute force est associée à une réaction.

Remarque :

Considérons la chute libre d'une bille A, de masse m_A, sous l'effet de la force gravitationnelle $\vec{F}_g$. Son accélération étant $a_A = F_g / m_A$, son déplacement durant un intervalle de temps t est alors $\Delta y_A = a_A t^2/2$. A exerce sur la Terre une force de même module qui engendre une accélération de la Terre $a_T = F_g / m_T$, m_T étant la masse de la planète. Le déplacement associé à cette accélération durant t est donc $\Delta y_T = a_T t^2/2$. Le rapport du déplacement de A sur celui de la Terre est: $\Delta y_A/\Delta y_T = a_A/a_T = m_T/m_A \approx 10^{24}$. Ce résultat montre que $\Delta y_A >> \Delta y_T$.

IV.4. Validité des lois de Newton

Les lois de Newton sont valables dans n'importe quel système de référence galiléen. Pour le démontrer, considérons les deux référentiels d'inertie:

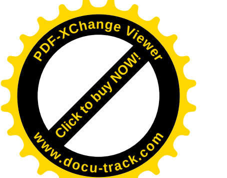
- $\Re$(O, x, y, z), supposé fixe (**repère absolu).**
- $\Re'$(O′, x′, y′, z′), en mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\Re$ (**repère relatif).**

Si une particule est soumise à des forces dont la résultante est $\vec{F}$, nous pouvons lui appliquer la deuxième loi de Newton dans le repère $\Re$:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a \qquad \text{(III.14)}$$

$\vec{a}_a$ étant l'accélération absolue. Dans $\Re'$, l'accélération de la particule est

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$$




où $\vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$ sont respectivement les accélérations d'entrainement et de Coriolis. Comme $\Re'$ est en mouvement rectiligne uniforme,

- le caractère rectiligne fait que

$$\vec{a}_c = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2}$$

- le caractère uniforme entraîne

$$\frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{a}_e = 0$$

en conséquence $\vec{a}_r = \vec{a}_a$ et

$$\vec{F} = m\vec{a}_r \qquad \text{(III.15)}$$

En conclusion, la deuxième loi de Newton est valable dans n'importe quel système de référence galiléen.

V. PREVISION DES MOUVEMENTS DES CORPS - LOI DE FORCE

Dans cette section, nous allons considérer les lois générales, dites lois de forces, établies pour un certain nombre d'interactions.

V.1. Le poids

a. Définition

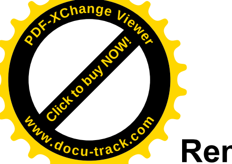
Nous appelons **poids** d'un corps, en un lieu donné, la **force attractive**, notée $\vec{P}$, que la terre exerce sur celui-ci.

L'étude expérimentale de la chute de corps de différentes masses, quelque soient leurs vitesses initiales, en négligeant la résistance de l'air, donne lieu aux conclusions suivantes :

- le mouvement de chute libre au voisinage de la terre est un mouvement d'accélération constante ;
- tous les corps tombent en un lieu donné avec la même accélération, que l'on note $\vec{g}$, et que l'on appelle **accélération de la pesanteur**.

La deuxième loi de Newton nous permet de définir le poids d'un corps de masse m :

$$\vec{P} = m\vec{g} \qquad \text{(III.16)}$$




Remarques:

- En général, on appelle champ toute fonction qui dépend de la position. En particulier, un champ vectoriel est un vecteur qu'on associe à chaque point de l'espace. C'est pourquoi on utilise l'expression « champ de pesanteur » quand on désigne $\vec{g}$.

- $\vec{g}$ pointe à peu près vers le centre de la terre et sa grandeur se situe entre 9,78 m/s^2 et 9,83 m/s^2 selon les endroits (plus fort aux pôles, plus faible vers l'équateur). Elle vaut environ 9.81 m/s^2 en Algérie. Ces variations sont attribuables à la forme légèrement aplatie de la terre, mais aussi à l'effet de la force centrifuge associée à la rotation de la terre, un effet qui n'est pas strictement gravitationnel.

b. Application : Mouvement d'un projectile dans le champ de la pesanteur.

Considérons un projectile en mouvement dans le champ de pesanteur. Choisissons un système cartésien d'axe (Oy) vertical ascendant comme le montre la figure III.11. En conséquence,

$$\vec{a} = -g\,\vec{j}$$

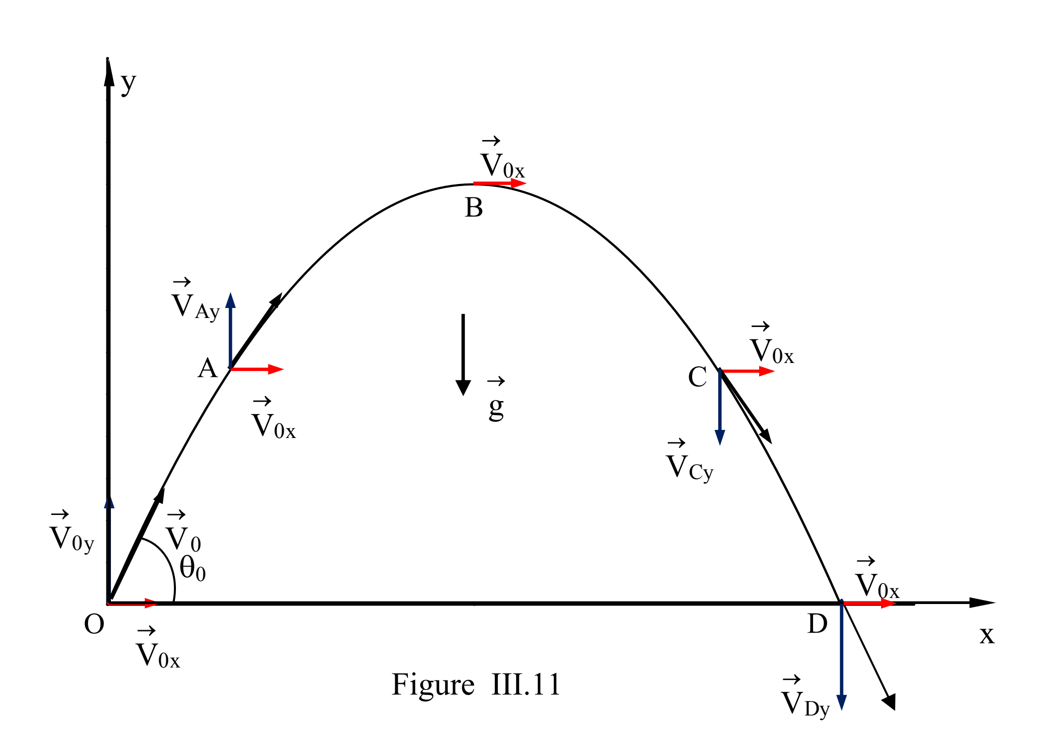


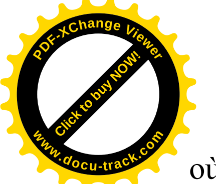
Figure III.11

Si la vitesse initiale de la particule est dans le plan (Ox, Oy) et si sa position initiale coïncide avec l'origine O, on écrit :

$$x_0(0s) = 0 \quad , \quad y_0(0s) = 0$$

$$\vec{V}_0(0s) = V_0\cos\theta_0\,\vec{i} + V_0\sin\theta_0\,\vec{j}$$

$$\left(V_{0x} = V_0\cos\theta_0; \quad V_{0y} = V_0\sin\theta_0\right)$$



où V_0 est le module de la vitesse initiale et θ_0 l'angle de tir. Les équations du mouvement sont ainsi

$$\begin{cases} a_x = 0 & \text{(III.17)} \\ a_y = -g & \text{(III.18)} \end{cases}$$

La vitesse s'obtient par une première intégration

$$\begin{cases} V_x(t) = V_{0x} + \int_0^t a_x dt = V_0 \cos\theta_0 & \text{(III.19)} \\ V_y(t) = V_{0y} + \int_0^t a_y dt = V_0 \sin\theta_0 - g\int_0^t dt = -gt + V_0 \sin\theta_0 & \text{(III.20)} \end{cases}$$

On peut ensuite intégrer la vitesse pour trouver la position

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t V_x dt = 0 + \int_0^t (V_0 \cos\theta_0)dt = (V_0 \cos\theta_0)t \\ y(t) = y_0 + \int_0^t V_y dt = 0 + \int_0^t (-gt + V_0 \sin\theta_0)dt = -\frac{g}{2}t^2 + (V_0 \sin\theta_0)t \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 \cos\theta_0)t & \text{(III.21)} \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (V_0 \sin\theta_0)t & \text{(III.22)} \end{cases}$$

On peut éliminer le temps de ces équations et exprimer la coordonnée y en fonction de x :

De l'équation (III.21) il vient :

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta_0} \qquad \text{(III.23)}$$

En substituant cette expression dans (III.22), on obtient

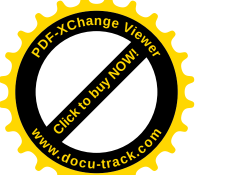
$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{(V_0 \cos\theta_0)^2} + (V_0 \sin\theta_0)\frac{x}{V_0 \cos\theta_0} \qquad \text{(III.24)}$$

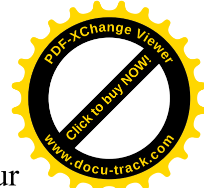
soit

$$y = -\frac{g}{2(V_0 \cos\theta_0)^2} x^2 + \operatorname{tg}\theta_0 \, x \qquad \text{(III.25)}$$

y est donc une fonction quadratique de x et la trajectoire de la particule est une parabole.

La trajectoire d'un projectile possède deux caractéristiques particulières :





- **la hauteur maximale :** c'est l'ordonnée, y_B, du sommet de la trajectoire (point B sur la figure III .11). Il est caractérisé par

$$V_{By} = -gt_B + V_0 \sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{V_0 \sin\theta_0}{g}$$

Avec la relation (III.22) on obtient

$$y_B = -\frac{(V_0 \sin\theta_0)^2}{2g} + \frac{(V_0 \sin\theta_0)^2}{g} = \frac{(V_0 \sin\theta_0)^2}{2g} \qquad \text{(III.26)}$$

- **la portée :** c'est la **distance horizontale** entre le point de tir et le point d'impact. Autrement dit, c'est la composante horizontale du vecteur déplacement correspondant. Dans notre cas, le projectile étant tiré à partir du sol qui est parfaitement horizontal, la portée est égale à x_D (abscisse du point D de la figure III.11) et s'obtient en résolvant l'équation (III.25) pour $y = 0$. Remarquons que cette dernière peut se mettre sous la forme :

$$x\left(-\frac{g}{2(V_0 \cos\theta_0)^2}x + tg\,\theta_0\right) = 0 \qquad \text{(III.27)}$$

La solution est soit x = 0 (le point de départ), soit, celle qui nous intéresse :

$$x_D = tg\theta_0 \frac{2(V_0 \cos\theta_0)^2}{g} = \frac{2V_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad \text{(III.28)}$$

La figure III.12 illustre la relation entre la portée et l'angle de tir.

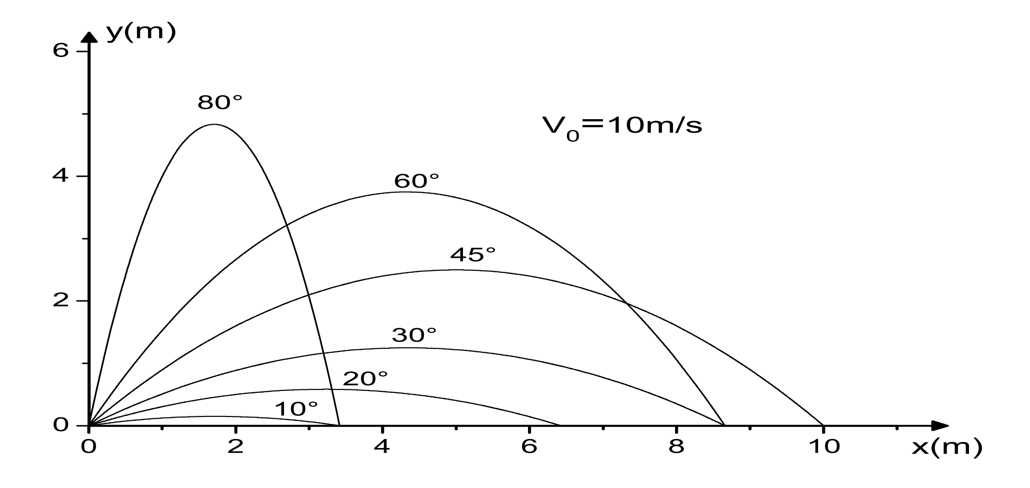
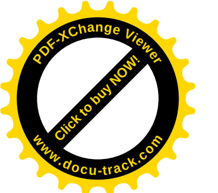
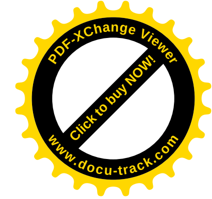
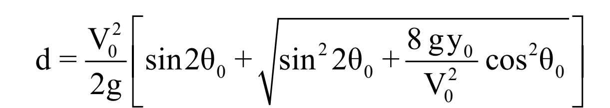


Figure III.12 *Trajectoires paraboliques d'un projectile associées à différentes valeurs de l'angle de tir, pour une vitesse de tir de 10m/s*

Exercice : Supposons que le projectile soit lancé d'une hauteur y_0 au-dessus du sol. Montrez que sa portée est alors



$$d = \frac{V_0^2}{2g}\left[\sin 2\theta_0 + \sqrt{\sin^2 2\theta_0 + \frac{8\,g y_0}{V_0^2}\cos^2\theta_0}\right]$$

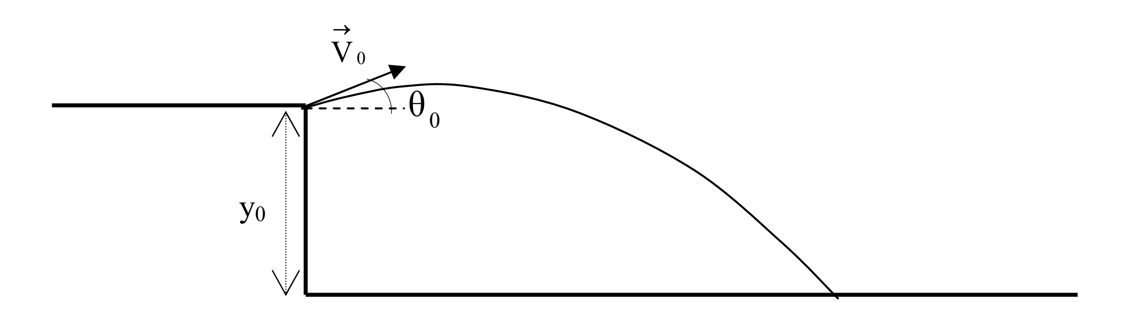


Figure III.13

V.2. Loi de gravitation universelle

a. La loi de gravitation universelle

La loi de la gravitation universelle de Newton est la base de la théorie expliquant une grande variété de phénomènes allant du mouvement des planètes à la chute des corps en passant par le flux et le reflux des marées. La loi de la gravitation universelle de Newton s'exprime comme suit :

Entre deux particules matérielles de masses m_1 et m_2, placées à une distance r l'une de l'autre, s'exerce une force d'attraction d'intensité

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(III.29)}$$

G est appelé **constante de gravitation universelle** ou constante de Cavendish. Elle a été mesurée pour la première fois par H. Cavendish à l'aide d'une balance à torsion en 1771. C'est une constante de proportionnalité qui dépend du système d'unités choisi. Dans le système S I **: G= 6,726 × 10^{-11} $m^3kg^{-1}s^{-2}$.**

Remarques :

- si $\vec{F}_{1/2}$ est la force gravitationnelle exercée par l'objet 1 sur l'objet 2 et $\vec{F}_{2/1}$ celle exercée par l'objet 2 sur l'objet 1, alors $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$ (3ème loi de Newton).

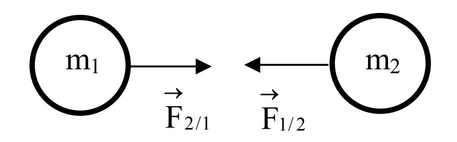
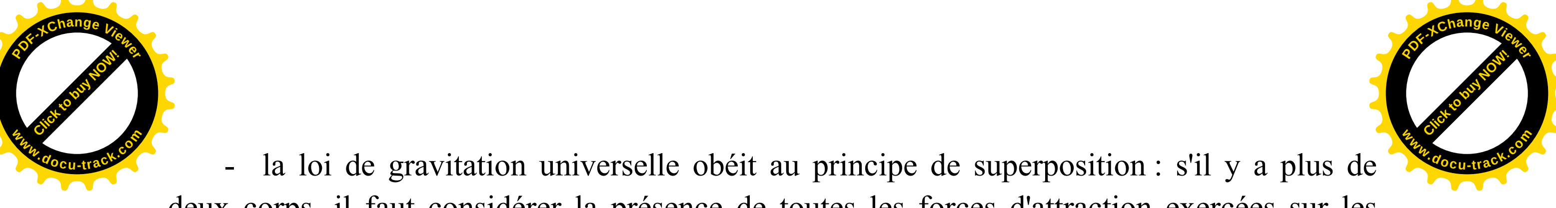


Figure III.14



- la loi de gravitation universelle obéit au principe de superposition : s'il y a plus de deux corps, il faut considérer la présence de toutes les forces d'attraction exercées sur les corps. Chaque corps subit une force d'attraction qui est la résultante des forces gravitationnelles exercées par les corps voisins.

Exemple : cas de trois corps non alignés.

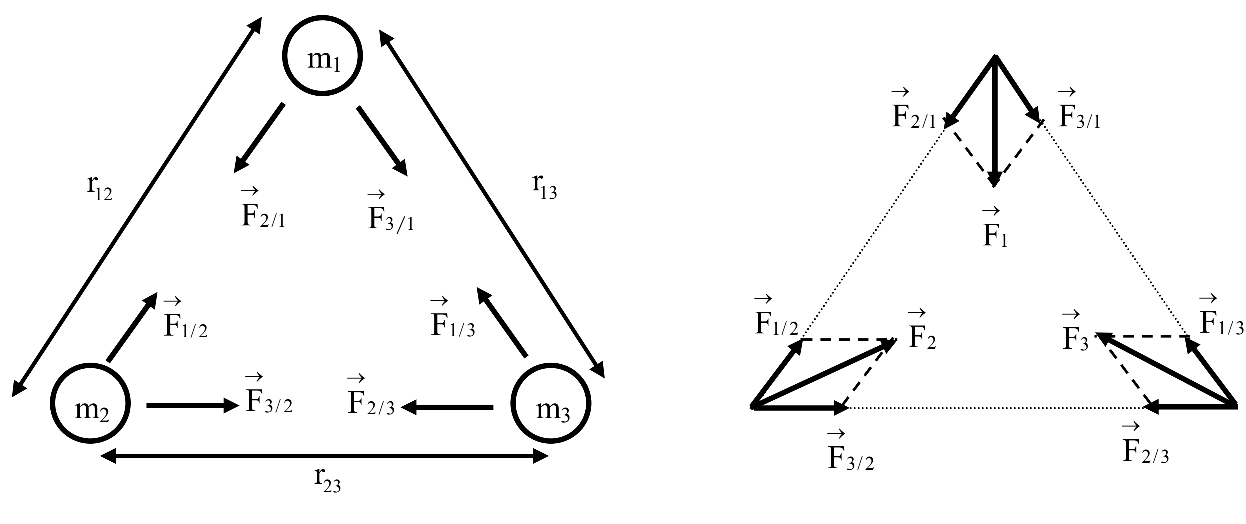


Figure III.15 Figure III.16

La figure III.16 représente les forces exercées sur chacun des corps et les résultantes associées. Ainsi, la résultante des forces exercées par m_2 et m_3 sur m_1 est

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1}$$

- la force gravitationnelle exercée par la terre sur un objet peut se mettre sous la forme :

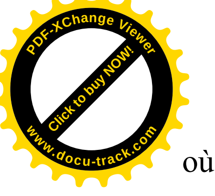
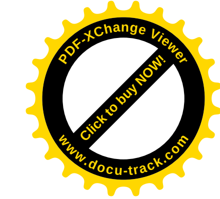
$$F_g = mg(r) = m\underbrace{\left(G\frac{M_T}{r^2}\right)}_{g(r)} \tag{III.30}$$

- la force gravitationnelle au voisinage de la terre, c'est-à-dire la force d'attraction exercée par la terre sur un objet, est le poids. À l'aide de la loi de gravitation universelle de Newton et le poids, on a

$$mG\frac{M_T}{R_T^2} = mg_0 \tag{III.31}$$

soit

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \tag{III.32}$$

où

- M_T est la masse de la Terre ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg) ;
- m est la masse du corps en kilogrammes ;
- R_T est le rayon de la Terre ($6{,}37 \cdot 10^{6}$ m) ;
- g_0 est le champ de pesanteur (9,8 m/s^2 près de la surface de la Terre).

b. Application 1 : troisième loi de Kepler

La loi de la gravitation universelle a été établie par Newton en s'appuyant en particulier sur les lois de Kepler, dont la troisième :

le carré de la période de révolution d'une planète du système solaire est proportionnel au cube du rayon moyen de son orbite.

$$T^2 = kr^3 \tag{III.33}$$

- k est une constante de proportionnalité qui s'exprime en s^2/m^3. Elle est la même pour toutes les planètes en orbite autour du soleil.

- r est le rayon moyen de l'orbite de la planète. Dans le cas d'une orbite elliptique, il représente le demi grand axe de la trajectoire ; pour les grandes planètes, la trajectoire est pratiquement circulaire et r correspond alors au rayon du cercle.

La constante k est déterminée par l'application de la deuxième loi de Newton pour une grande planète dont le mouvement est circulaire uniforme.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_g = m\,\vec{a}$$

soit, en modules

$$G\frac{m_S m}{r^2} = m\frac{V^2}{r} \tag{III.34}$$

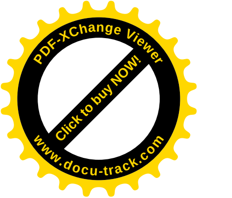
m_S est la masse du soleil et m celle de la planète. Comme la vitesse est reliée à la période de révolution par

$$V = \omega\, r = \frac{2\pi}{T} r \tag{III.35}$$

il vient

$$G\frac{m_S}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r^2$$

d'où



$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_S} r^3 \qquad \text{(III.36)}$$

Par identification avec la troisième loi de Kepler (équation (III.33)), on obtient l'expression suivante de la constante k

$$k = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \qquad \text{(III.37)}$$

Application: le soleil possédant une masse $m_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg et l'orbite de la terre autour du soleil un rayon moyen $r_T = 1{,}496 \cdot 10^{11}$m, on obtient

$$k = 2{,}9734 \cdot 10^{-19}\ s^2/m^3 \quad \text{et} \quad T = 3{,}1678 \cdot 10^7\ s$$

Remarque : Pour deux planètes 1 et 2 de périodes de révolution respectives T_1 et T_2, en mouvement sur des orbites de rayons moyens r_1 et r_2, on obtient la relation

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad \text{(III.38)}$$

c. Application 2: Le satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qu'un observateur sur Terre voit toujours dans le ciel au même endroit (il parait immobile par rapport au sol). Cette caractéristique est importante pour les télécommunications et la télédiffusion. Le satellite tourne donc autour de la Terre à la même vitesse angulaire que celle de la rotation de la Terre sur elle-même. De ce fait, sa période de rotation autour de la planète est la même que la période de révolution de celle-ci. Par conséquent, le satellite géostationnaire décrit dans un référentiel terrestre un mouvement circulaire uniforme de période T = 24 heures et ce dernier s'inscrit dans le plan équatorial de la Terre. Rappelons que la période est reliée à la vitesse angulaire par

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(III.39)}$$

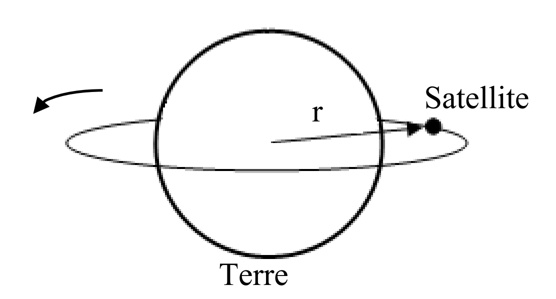


Figure III .17

La deuxième loi de Newton donne en modules :

$$F_g = ma$$

avec

$$\begin{cases} F_g = G\dfrac{m_T m}{r^2} \\ a = \dfrac{V^2}{r} = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow \quad G\frac{m_T m}{r^2} = m\omega^2 r \qquad \text{(III.40)}$$

m_T est la masse de la Terre ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg), et m celle du satellite.

On isole r :

$$r = \left(G\frac{m_T}{\omega^2}\right)^{1/3} \qquad \text{(III.41)}$$

Application numérique :

$$r = 4{,}21 \cdot 10^7\,\text{m} \quad ; \quad V = \frac{2\pi r}{T} = 3{,}08 \cdot 10^3\,\text{m/s}$$

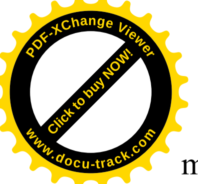
V.3. Les forces de contact ou forces de liaison

a. Introduction

Ce sont les forces qui s'exercent entre deux corps en contact physique l'un avec l'autre. Cette définition fait intervenir trois éléments : **deux objets** que l'on met en contact par une **surface**.

Remarquons qu'à l'échelle atomique, même les surfaces très lisses ne sont pas véritablement planes. Dans la réalité elles ont des anfractuosités un peu partout comme l'indique la représentation de la figure III.18 dans laquelle les surfaces en contact sont toutes bosselées. Ainsi, au lieu d'avoir un contact partout, on aura des microcontacts très localisés. Il faut donc distinguer la surface apparente et la surface qui est vraiment en contact. Cette dernière est beaucoup plus petite que la première. En conséquence, la force de contact ne s'applique pas de façon uniforme sur toute la surface, mais elle n'intervient que sur les aspérités. A ces endroits, les molécules étant très proches les unes des autres, ce sont les atomes des deux corps qui entrent mutuellement en interaction. Les forces agissant sur ceux-ci sont très compliquées à analyser: forces coulombiennes, force de Vander Waals, etc...

Plusieurs facteurs influencent ces forces: la nature des matériaux en présence, le fini des surfaces, les corps interstitiels (contaminants, molécules adsorbées, débris d'usure, poussières, etc.…), la température et le degré de contamination des surfaces. Comme il est quasiment impossible de modéliser les forces de contact en prenant en compte toute les interactions



microscopiques, elles sont déterminées de façon globale au moyen de méthodes expérimentales.

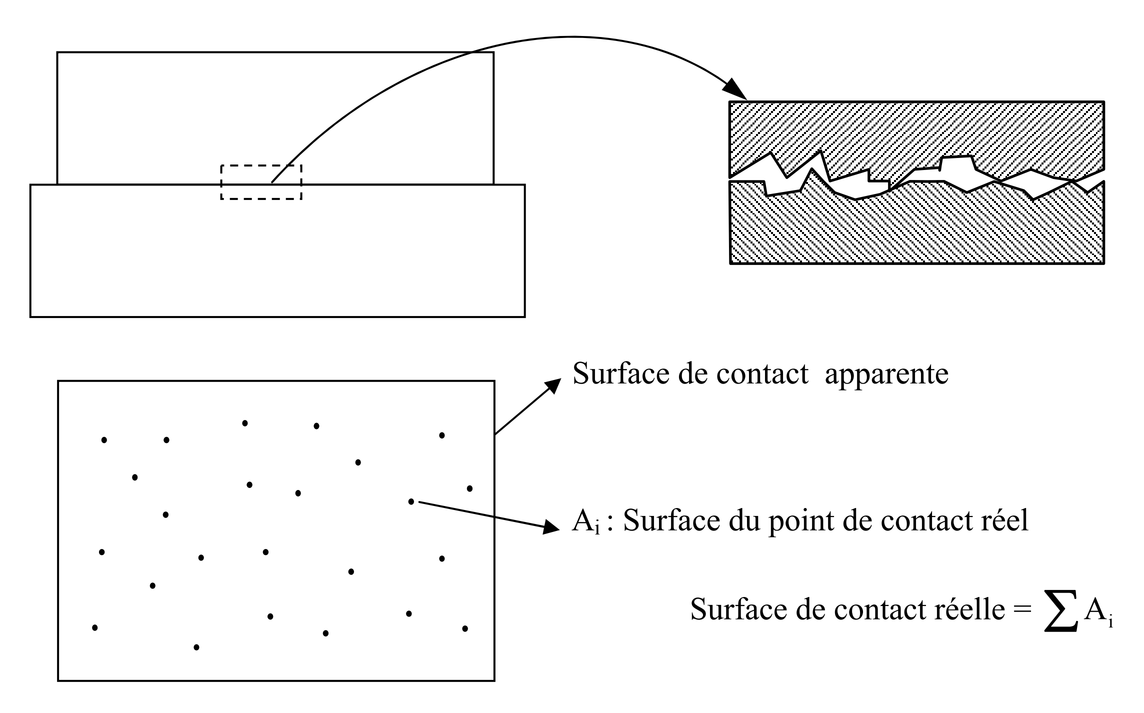


Figure III.18

b. mise en évidence des forces de contact

Dans les exemples du tableau III.3, le poids $\vec{P}$ n'est pas égal à $m\vec{a}$ et, de ce fait, la deuxième loi de Newton implique qu'il existe une force de contact avec le sol, désignée $\vec{C}$, telle que

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

Soit

$$\vec{C} = m\vec{a} - \vec{P}$$

c. Le frottement

Considérons un objet posé sur un plan horizontal. Celui-ci est en équilibre sous l'action des deux forces $\vec{P}$ et $\vec{C}$ qui doivent être égales et opposées.

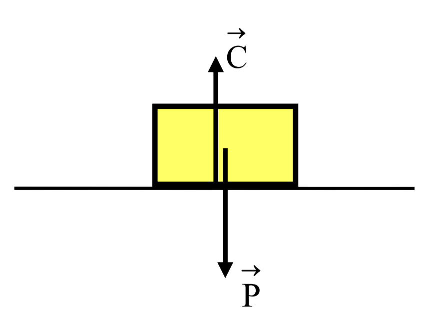
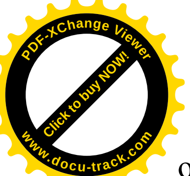


Figure III.19

Analysons le comportement de ce corps et l'évolution des actions de contact (plan/objet) lorsqu'on exerce sur lui une force de traction horizontale $\vec{F}$ graduellement croissante. On

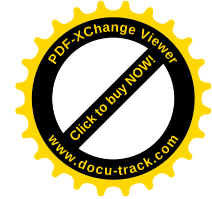


observera deux types de frottements: le "frottement statique" et le "frottement dynamique".



Exemple	Représentation des forces	Observations
Corps en équilibre sur un plan horizontal	$\vec{C}$ $\vec{P}$	$\vec{C}$ appelée habituellement **réaction** ne l'est pas au sens de la troisième loi de Newton. $\vec{C}$ contribue au maintien du corps sur le plan horizontal.
Roue en mouvement $m\vec{a}$	$\vec{C}$ $\vec{P}$ $\vec{C}$ $-\vec{P}$ $m\vec{a}$	$\vec{C}$ contribue au maintien de la roue sur le plan horizontal et est à l'origine du mouvement de la roue.
Voiture dans un virage $m\vec{a}$	$\vec{C}_2$ $\vec{C}_1$ $\vec{P}$ $\vec{C}$ $-\vec{P}$ $m\vec{a}$	$\vec{C}$ contribue au maintient de la voiture sur le plan horizontal et l'empêche de déraper. Elle se répartit sur les quatre roues.

Tableau III.3

- **Le "frottement statique"**(figure III.20) :

Premier cas : l'adhérence

Le corps est en équilibre et, $\vec{P}$ étant vertical et $\vec{F}$ horizontale, l'application de la deuxième loi de Newton met alors en évidence une force de contact $\vec{C}$ telle que

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F} = 0$$

soit

$$\vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$$

La projection géométrique de cette équation sur l'axe (Ox) donne :

$$\vec{C}_X = -\vec{F} \qquad \text{(III.42)}$$

$\vec{C}_X$ est une force d'adhérence qui s'oppose à $\vec{F}$ et au déplacement éventuel de l'objet vers la droite. De plus cette force est tangente à la surface de contact, elle est par définition une force de frottement. Comme le corps ne se déplace pas on dit que $\vec{C}_X$ est une force de frottement **statique.**

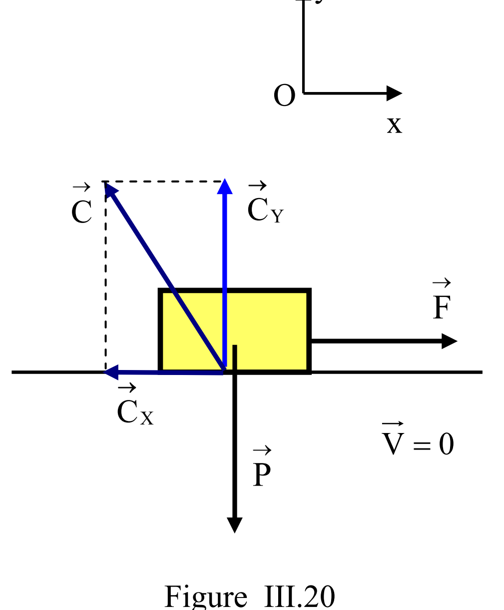
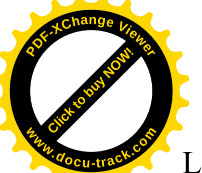
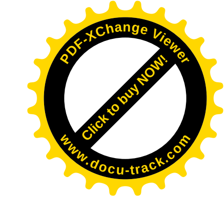


Figure III.20

Deuxième cas : la rupture de l'équilibre

Si $\vec{F}$ devient assez grande, il intervient une valeur limite $\left|\vec{F}\right|_{limite}$ à partir de laquelle l'équilibre est rompu et l'objet commence à glisser sur le plan. Cette valeur est associée à une adhérence limite $\left|\vec{C}_{0X}\right| = \left|\vec{F}\right|_{limite}$ qui nous permet de définir le coefficient de frottement statique μ_S :

$$\mu_S = \frac{\left|\vec{C}_{0X}\right|}{\left|\vec{C}_{0Y}\right|} \qquad \text{(III.43)}$$

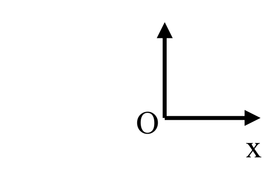
Le coefficient de frottement statique est caractérisé par les propriétés suivantes :

- ce coefficient, sans dimension, exprime la proportionnalité du module de la force limite de frottement, $\left|\vec{C}_{0X}\right|$, et celui de la force de pression, $\left|\vec{C}_{0Y}\right|$;

- μ_S dépend de la nature des surfaces en contact ;

- il est déterminé expérimentalement ;

- il ne dépend pas de l'aire des surfaces en contact.



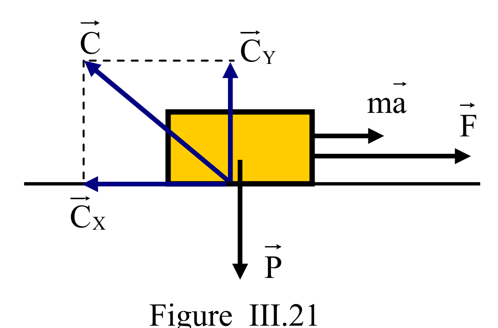


Figure III.21

- **Le "frottement dynamique" :** c'est celui qui oppose une résistance lorsque l'objet posé sur le plan est déjà en glissement (figure III.21).

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F} = m\,\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{C} = m\,\vec{a} - \vec{P} - \vec{F}$$

$\vec{C}$ possède une composante tangentielle, $\vec{C}_X$, qui s'oppose au mouvement du corps qui, par définition, est une force de frottement **dynamique**. Comme dans le cas statique, on introduit un coefficient de frottement dynamique (ou de glissement) :

$$\mu_d \left(\text{ou } \mu_g\right) = \frac{\left|\vec{C}_X\right|}{\left|\vec{C}_Y\right|} \qquad \text{(III.44)}$$

Le coefficient de frottement dynamique est caractérisé par les propriétés suivantes :

- ses valeurs sont déterminées expérimentalement ;
- $\mu_d < \mu_S$;
- μ_d est sensiblement indépendant de la vitesse ;
- μ_d ne dépend que de la nature des surfaces en contact.

Complément :

- Les impuretés entre les deux surfaces de contact sont souvent plus importantes au niveau des sources de frottement que les imbrications des aspérités de surface.

- Le frottement est faiblement dépendant de la surface car la rugosité à l'échelle atomique est telle que seulement un très faible pourcentage de la surface totale des deux objets sont réellement en contact (la surface de contact réelle est beaucoup plus petite que la surface de contact apparente, voir figure III.18).

- En réalité, l'origine du frottement fait intervenir une multitude de paramètres couvrant un spectre très large de phénomènes physiques : rugosité des surfaces, élasticité, plasticité, adhésion, lubrification, température, usure, chimie des surfaces, humidité, etc.

d. Généralisation

Lorsque deux corps sont en contact, ils exercent l'un sur l'autre des forces de contact opposées en sens mais ayant la même intensité et la même direction (principe de l'action et de la réaction).

Exemples :

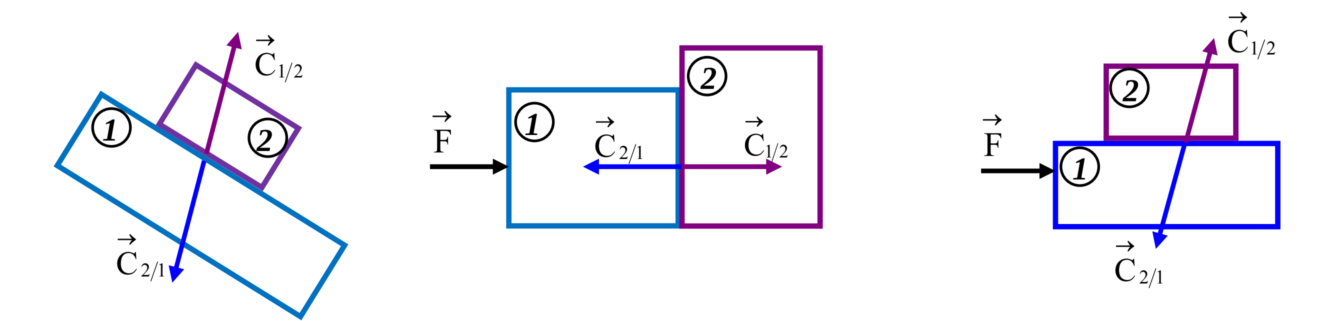


Figure III.22

Dans ces exemples,

$$\vec{C}_{1/2} = -\vec{C}_{2/1} \qquad \text{(III.45)}$$

- $\vec{C}_{1/2}$ est la force de contact exercée par le corps ① sur le corps ②

- $\vec{C}_{2/1}$ est la force de contact exercée par le corps ② sur le corps ①

La force de contact possède deux composantes définies par rapport au plan tangent aux surfaces en contact (figure III.23)

$$\vec{C} = \vec{C}_T + \vec{C}_N \qquad \text{(III.46)}$$

On peut aussi trouver la notation

$$\vec{C} = \vec{C}_{\parallel} + \vec{C}_{\perp} \qquad \text{(III.47)}$$

$\vec{C}_N$ (ou $\vec{C}_\perp$) est la composante normale et représente une force de pression ; elle est orientée vers le corps sur lequel s'applique $\vec{C}$. $\vec{C}_T$ (ou $\vec{C}_{\parallel}$) est la composante tangentielle et représente la force de frottement ; elle est orientée de façon à s'opposer au mouvement relatif de la surface de contact du corps qui subit $\vec{C}$ par rapport au corps avec lequel il est en contact.

Les exemples ci-dessous mettent en évidence deux types de frottement :

- Le frottement résistant : il s'oppose au déplacement global du corps sur lequel il s'applique ;

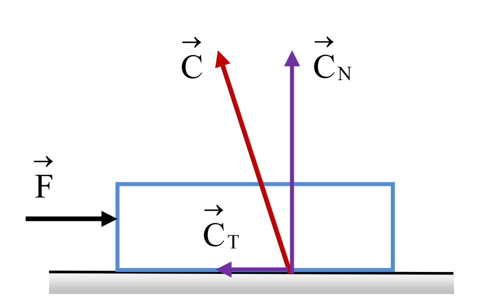
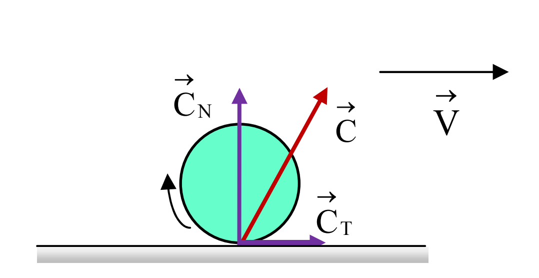


Figure III.23a

- Le frottement moteur : il contribue au déplacement global du corps sur lequel il s'applique.



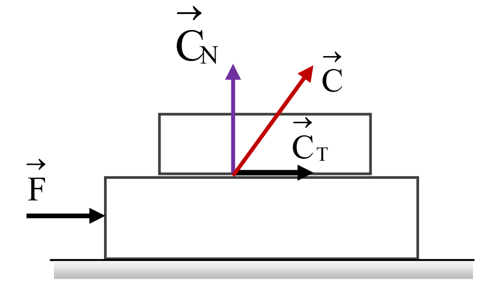


Figure III.23b

On définit les coefficients de frottement

- statique :

$$\mu_S = \frac{\left|\vec{C}_{0T}\right|}{\left|\vec{C}_{0N}\right|} \quad \text{valable juste à la rupture d'équilibre} \qquad \text{(III.48)}$$

- dynamique :

$$\mu_d = \frac{\left|\vec{C}_T\right|}{\left|\vec{C}_N\right|} \quad \text{valable lorsque le corps est en mouvement relatif par rapport à l'autre corps avec lequel il est en contact} \qquad \text{(III.49)}$$

Exercice 1

Un objet de masse $m = 1\,\text{kg}$, posé sur un sol horizontal, est tiré avec une force $\vec{F}$ inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ (figure III.24). Son contact avec le sol est caractérisé par les coefficients de frottements statique $\mu_S = 0{,}5$ et dynamique $\mu_d = 0{,}2$. Calculez l'intensité de la force $\vec{F}$ dans les trois cas suivants :

1. au moment de la rupture d'équilibre ;
2. le corps est en mouvement uniforme ;
3. son mouvement a une accélération de $1\ \text{m/s}^2$.

Réponses :

L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes

$$\sum (F_{ext})_x = F\cos\alpha - C_T = ma \qquad \text{(III.50)}$$

$$\sum (F_{ext})_y = F\sin\alpha - P + C_N = 0 \qquad \text{(III.51)}$$

L'équation (III.51) et la définition du coefficient de frottement nous permettent d'écrire :

$$C_T = \mu C_N = \mu(P - F\sin\alpha)$$

En substituant cette expression dans III.50, il vient

$$F\cos\alpha - \mu(P - F\sin\alpha) = ma$$

et on tire :

$$F = \frac{ma + \mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

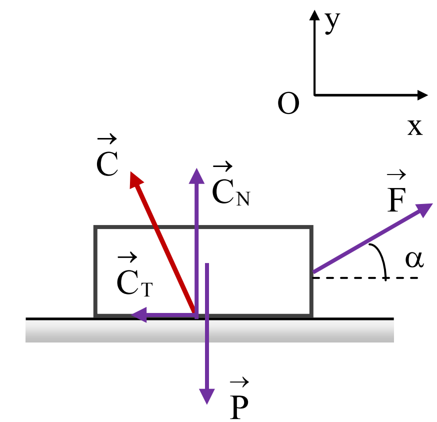
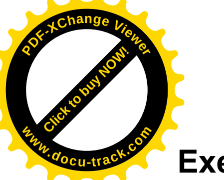
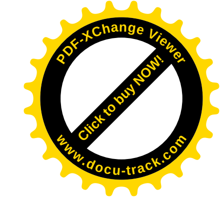


Figure III.24

1[er] cas : rupture d'équilibre $\left(a = 0\,\text{m/s}^2\ ;\ \mu = \mu_S\right)$: $F = 4{,}48\ \text{N}$

2[ième] cas : mouvement uniforme $\left(a = 0\,\text{m/s}^2\ ;\ \mu = \mu_d\right)$: $F = 2{,}07\ \text{N}$

3[ième] cas : mouvement uniformément accéléré $\left(a = 1\,\text{m/s}^2\ ;\ \mu = \mu_d\right)$ $F = 3{,}10\ \text{N}$

Exercice 2

Un bloc, de masse $m = 1\,kg$, est posé sur une surface rugueuse inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale (figure III.25). En augmentant graduellement la valeur de θ, on a effectué les observations suivantes :

- le bloc a commencé à glisser lorsque l'angle a atteint la valeur $\theta = 20°$;
- son accélération était de 3,2 m /s^2 pour $\theta = 30°$.

En déduire les valeurs des coefficients de frottements statique et dynamique.

Réponses :

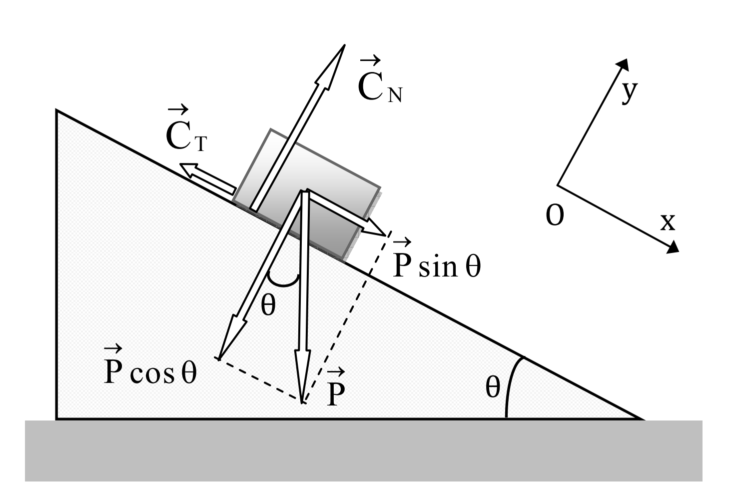


Figure III.25

L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\,\vec{a}$$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes

$$\sum (F_{ext})_x = P\sin\theta - C_T = ma \qquad \text{(III.52)}$$

$$\sum (F_{ext})_y = -P\cos\theta + C_N = 0 \qquad \text{(III.53)}$$

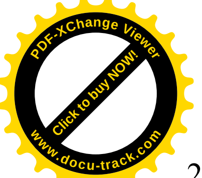
L'équation (III.53) et la définition du coefficient de frottement nous permettent d'écrire :

$$C_T = \mu\,C_N = \mu\,P\cos\theta \;\Rightarrow\; P\sin\theta - \mu\,P\cos\theta = ma$$

On isole μ :

$$\mu = \frac{P\sin\theta - ma}{P\cos\theta} \qquad \text{(III.54)}$$

1er cas : rupture d'équilibre $\left(a = 0\,m/s^2\ ;\ \mu = \mu_S\ ;\ \theta = 20°\right)$: $\mu_S = tg\theta = 0,364$




2ième cas : mouvement uniformément accéléré $\left(a = 3.2\,m/s^2\ ;\ \mu = \mu_d\ ;\ \theta = 30°\right)$:

$$\mu_d = \frac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta} = 0,2$$

e. Frottement visqueux

α. Résistance visqueuse

Si on prend une plaque pour la déplacer dans la direction perpendiculaire à sa plus grande surface, on ressent une force qui tend à s'opposer au déplacement: cette force s'appelle la **résistance de l'air**. Une force de même nature peut être ressentie si on expose la plaque à un écoulement d'air tel que le vent. Ainsi, nous pouvons placer des objets dans une soufflerie et étudier les propriétés de la résistance de l'air. Expérimentalement, on peut mettre en évidence les paramètres influençant la résistance de l'air :

- **l'aire** : si on double l'aire de l'objet la force mesurée double également. La résistance de l'air est donc proportionnelle à l'aire.

- **la vitesse**: en augmentant la vitesse de l'écoulement de l'air, la force exercée par l'air augmente.

- **la masse volumique**: en altitude la densité de l'air diminue. On peut considérer qu'il y a moins de particules d'air pour un même volume. Par conséquent, si le nombre de particules diminue, la résistance diminue. La résistance de l'air est donc proportionnelle à sa masse volumique.

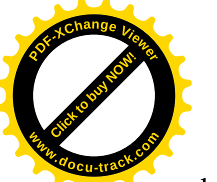
- **la forme du corps**: selon la forme du corps la résistance de l'air sera plus ou moins grande. Pour un corps sphérique, la résistance de l'air sera moins importante que pour une plaque.

Lorsqu'un objet se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), le milieu exerce généralement une force de résistance opposée à la vitesse de l'objet. On doit distinguer ici deux types de résistance:

- celle causée par la viscosité du milieu, une propriété physique du fluide qui se manifeste lors de l'écoulement de ce fluide à proximité d'une surface ou d'un objet ou, ce qui est équivalent, lors du mouvement d'une surface ou d'un objet dans le fluide. La force de résistance visqueuse au mouvement de l'objet est proportionnelle à sa vitesse et est à peu près opposée à celle-ci.

$$\vec{f}_v = -k\,\vec{V} \qquad \text{(III.55)}$$

k est un coefficient qui dépend de la géométrie de l'objet et de la viscosité du fluide qui elle-même dépend de la pression et de la température. $\vec{f}$ n'est exactement opposée à la vitesse que si l'objet possède une symétrie de rotation autour de l'axe de la vitesse. Pour tous les autres



objets, la force de résistance n'est qu'approximativement dans la direction opposée à $\vec{V}$ et peut causer sur l'objet des mouvements de rotation, etc.

- si la vitesse de l'objet dépasse une certaine limite (qui dépend de la forme de l'objet et du milieu dans lequel il se déplace), l'écoulement du fluide autour de l'objet entre dans un régime turbulent, caractérisé par l'apparition de tourbillons. L'apparition de ces derniers cause des baisses de pression derrière le mobile qui se manifestent par une force de résistance, dite **force de traînée**, généralement proportionnelle au carré de la vitesse de l'objet.

$$\left|\vec{f}_t\right| = k' V^2 \qquad \text{(III.56)}$$

Dans ce cas aussi, cette force n'est qu'approximativement opposée à la direction de $\vec{V}$. Elle ne lui est exactement opposée que si l'objet présente une symétrie de révolution autour de la direction de sa vitesse. Dans ce cas, la force de traînée peut s'écrire

$$\vec{f}_t = -k' V^2 \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \qquad \text{(III.57)}$$

La force de résistance totale (viscosité + traînée) est alors :

$$\vec{f} = -k\vec{V} - k' V^2 \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \qquad \text{(III.58)}$$

Remarque :

Dans la plupart des cas considérés dans la cadre de ce cours, les vitesses étant faibles, la force de résistance se réduit à la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{V}$$

β. Exemple de frottement visqueux horizontal

Considérons le mouvement supposé horizontal d'un corps immergé dans un fluide et soumis à une force $\vec{F}$, horizontale et constante. Le fluide exerce sur le corps une force de frottement de la forme:

$$\vec{f} = -k\vec{V}$$

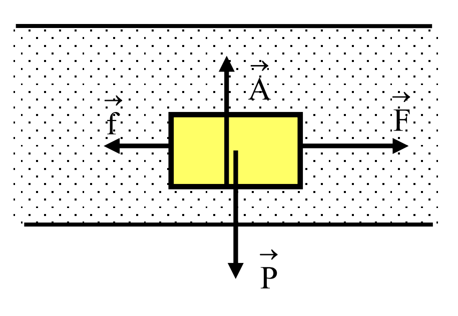
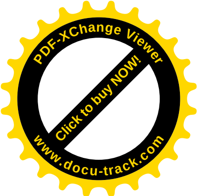
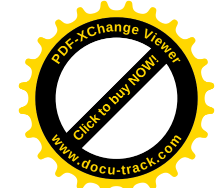


Figure III.26

Les autres forces appliquées sur le mobile sont le poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{A}$ et la force de traction $\vec{F}$. Comme le mouvement se maintient sur le plan horizontal, cela veut dire que $\vec{P}$ et $\vec{A}$ se compensent et par application de la deuxième loi de Newton nous avons:

$$\underbrace{\vec{P}+\vec{A}}_{0}+\vec{f}+\vec{F}=m\,\vec{a} \Leftrightarrow -k\,\vec{V}+\vec{F}=m\frac{d\,\vec{V}}{dt}$$

Algébriquement on aura

$$-kV+F=m\frac{dV}{dt}$$

Dès lors il vient:

$$\frac{dV}{V-\frac{F}{k}}=-\frac{k}{m}dt$$

En intégrant on obtient:

$$\ln\left(V-\frac{F}{k}\right)=-\frac{k}{m}t+cte$$

En prenant l'exponentielle:

$$V-\frac{F}{k}=B\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

B est une constante d'intégration qu'on peut obtenir, par exemple, en utilisant les conditions initiales. Si la vitesse initiale est nulle alors

$$B=-\frac{F}{k}$$

en conséquence nous obtenons:

$$V(t)=\frac{F}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Posons:

$$V_L=\frac{F}{k} \quad ; \quad \tau=\frac{m}{k}$$

τ sera assimilé à une constante de temps. Ce qui donne :

$$V(t)=V_L\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{(III.59)}$$

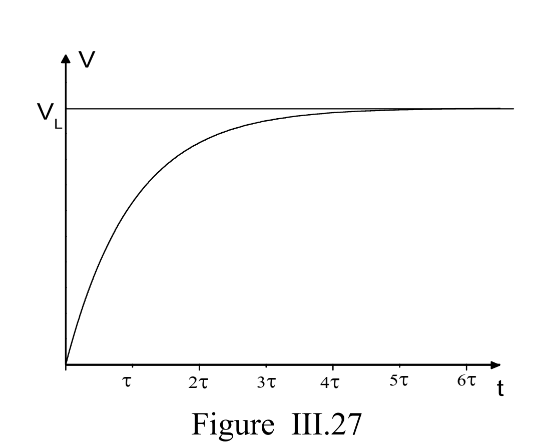


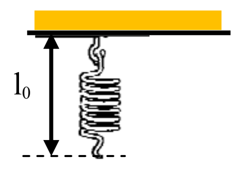
Figure III.27

Ainsi, la vitesse croît de sa valeur initiale jusqu'à une valeur asymptotique V_L appelée **vitesse limite** (figure III.27). Nous observons également un comportement intéressant : un corps lourd met plus de temps pour atteindre la vitesse limite qu'un corps mobile léger!



V.4. Les forces élastiques

Considérons le système masse-ressort de la figure III.28. A l'extrémité inférieure du ressort, de longueur à vide l_0 et suspendu au plafond, est accrochée une masse qui lui fait subir un allongement $\Delta l = l - l_0$ pour atteindre un équilibre.



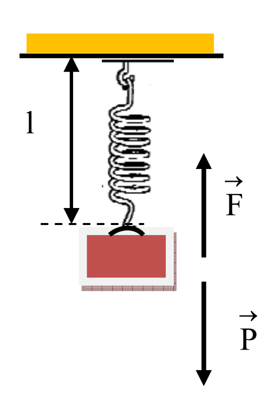


Figure III.28

En vertu de la deuxième loi de Newton, le poids doit être compensé par une force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur la masse dans le sens contraire à l'allongement:

$$\vec{P} + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{P} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = |\vec{P}| = mg$$

En faisant varier la masse et en mesurant l'allongement Δl correspondant, on peut tracer le graphe de la variation du module de $\vec{F}$ en fonction de $|\Delta l|$. On obtient un segment de droite de pente K (figure III.29).

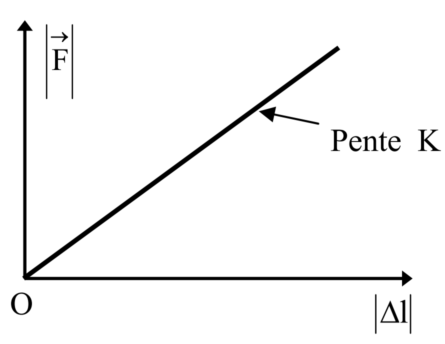


Figure III.29

Une expérience analogue est réalisée avec un ressort en compression sous l'effet d'une masse posée sur son extrémité supérieure comme le montre la figure III.30 :

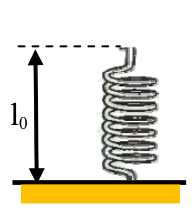
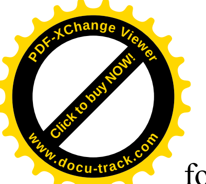


Figure III.30

Dans ce cas aussi, le poids doit être compensé par une force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur la masse dans le sens contraire à sa compression. En faisant varier la masse et en mesurant la compression Δl correspondante, on peut tracer le graphe de la variation du module de $\vec{F}$ en



fonction de $|\Delta l|$. On obtient également un segment de droite de pente K. On en déduit que dans les deux cas la force $\vec{F}$ est reliée à la déformation du ressort par

$$\left|\vec{F}\right| = K\,|\Delta l| \qquad \text{(III.60)}$$

Cette dépendance linéaire de la force avec la déformation est appelée loi de Hooke. La constante K est appelée « constante élastique » ou « constante de raideur » du ressort" dont l'unité est le Newton par mètre (N/m). Comme $\vec{F}$ est orientée dans le sens contraire à la déformation du ressort, il convient d'écrire :

$$\vec{F} = -K\,\Delta\vec{l} \qquad \text{(III.61)}$$

où

$$\Delta\vec{l} = (l - l_0)\,\vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire orienté dans le sens de **l'allongement** du ressort. Ainsi, lorsqu'un ressort est déformé par une action extérieure, il exerce une force de réaction décrite par (III.61) sur l'agent qui le déforme.

VI. MOMENT CINÉTIQUE D'UNE PARTICULE

La quantité de mouvement s'est révélée très utile dans l'étude des mouvements de translation. Le **moment cinétique** est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans le cas des mouvements de rotation ; on l'appelle aussi **quantité de mouvement de rotation**.

VI.1. Moment cinétique d'une particule

a. Définition:

Soit une particule de masse m se trouvant en un point repéré par le vecteur position $\vec{r}$ et se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$. Son moment cinétique $\vec{L}$, par rapport à l'origine O, est défini par :

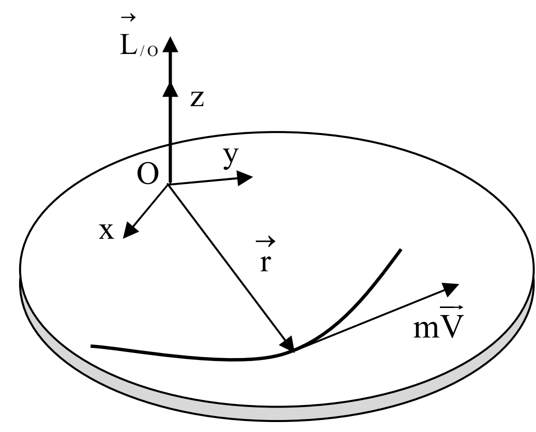
$$\vec{L}_{/O} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}} \qquad \text{(III.62)}$$

$\vec{\mathcal{P}}$ étant la quantité de mouvement donnée par :

$$\vec{\mathcal{P}} = m\,\vec{V}$$

Par sa définition, le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ et orienté de façon à ce que le trièdre $\left(\vec{r}, \vec{\mathcal{P}}, \vec{L}\right)$ soit direct et son module est:

$$\left|\vec{L}_{/0}\right| = \left|\vec{r}\right| \left|\vec{\mathcal{P}}\right| \sin\left(\vec{r}, \vec{\mathcal{P}}\right)$$



b. Cas particuliers

- Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon r centré à l'origine, le vecteur position est toujours perpendiculaire à la direction du vecteur vitesse et donc:

$$\vec{L}_{/0} = m\,\vec{r} \times \vec{V} \Rightarrow \left|\vec{L}_{/0}\right| = m\,r\,V = mr^2\omega$$

Comme le moment cinétique a même sens et même direction que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, il devient évident que :

$$\vec{L}_{/0} = mr^2\,\vec{\omega} \qquad \text{(III.63)}$$

- Pour un mouvement plan curviligne quelconque, nous introduisons les composantes radiale et transversale de la vitesse, dans un système de coordonnées polaires, de pôle O:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta$$

et il vient

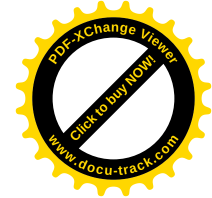
$$\vec{L}_{/0} = m\,\vec{r} \times \vec{V} = m\,\vec{r} \times \left(\vec{V}_r + \vec{V}_\theta\right) = m\,\vec{r} \times \vec{V}_r + m\,\vec{r} \times \vec{V}_\theta$$

Compte tenu du fait que $\vec{V}_r$ est parallèle à $\vec{r}$ on obtient

$$\vec{L}_{/0} = m\,\vec{r} \times \vec{V}_\theta$$

et sous forme scalaire:

$$\left|\vec{L}_{/0}\right| = mrV_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(III.64)}$$

VI.2. Théorème du moment cinétique pour une particule

La dérivée du moment cinétique s'obtient en appliquant les règles de dérivation des produits de fonctions :

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}\times\vec{\mathcal{P}}\right)}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\mathcal{P}}\right) + \left(\vec{r}\times\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}\right) \qquad \text{(III.65)}$$

Remarquons que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\mathcal{P}} = \vec{V}\times m\vec{V} = 0$$

et, en vertu de la deuxième loi de Newton,

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

La dérivée du moment cinétique se réduit alors à la forme

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces extérieures appliquées sur la particule. De la définition du moment de $\vec{F}$ par rapport à l'origine

$$\vec{\tau}_{/O}\left(\vec{F}\right) = \vec{r}\times\vec{F}$$

Il en résulte que :

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \vec{\tau}_{/O}\left(\vec{F}\right) \qquad \text{(III.66)}$$

D'où le **théorème du moment cinétique pour une particule**: la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule en mouvement est égale au moment résultant des forces extérieures, par rapport au point de référence utilisé pour le moment cinétique.

Remarques :

- Le théorème du moment cinétique est analogue à la deuxième loi de Newton.
- En coordonnées cartésiennes, on obtient les expressions suivantes :

$$\vec{L}_{/0} = m\left(yV_z - zV_y\right)\vec{i} + m\left(zV_x - xV_z\right)\vec{j} + m\left(xV_y - yV_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{\tau}_{/O}\left(\vec{F}\right) = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$

VI.3. Conservation du moment cinétique - Forces centrales

L'analyse de la relation

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \vec{\tau}_{/O}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(III.67)}$$

montre que la dérivée du moment cinétique par rapport au temps est nulle dans deux cas :

- La particule est isolée, c'est-à-dire que la résultante des forces extérieures est nulle. En conséquence, le moment cinétique d'une particule libre est constant.

- $\vec{F}$ est constamment parallèle à $\vec{r}$ et, de ce fait, sa direction passe constamment par le point de référence utilisé pour le moment cinétique. Comme par définition, une force dont la direction passe constamment par un même point fixe est une **force centrale**, $\vec{F}$ est alors centrale. Le point de référence est, dans ce cas, appelé **centre de forces.** Ainsi, le moment cinétique par rapport au centre de forces est constant si la force est centrale. La réciproque est aussi vraie: si le moment cinétique est constant, la force est centrale.

VI.4. Application : démonstration de la deuxième loi de Kepler

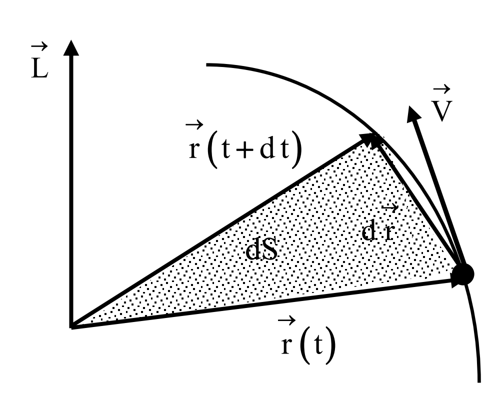


Figure III.32

Dans le cadre du mouvement d'une planète autour du Soleil, cette dernière est soumise à la seule force gravitationnelle qui est centrale puisqu'elle est constamment dirigée vers le soleil. Son moment cinétique, par rapport au centre du soleil, est évidemment constant, c'est-à-dire

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{V} = \text{constante} \qquad \text{(III.68)}$$

En se basant sur le schéma de la figure III.32 la surface dS délimitée par $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t+dt)$ et $d\vec{r}$ vaut (cf. chapitre I §VI)

$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$$

soit,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{V}\right|$$

Compte tenu de la relation (III.68), il vient :

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2m}\left|m\,\vec{r}\times\vec{V}\right|=\frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}=C\quad\text{(constante)}\qquad\text{(III.69)}$$

La quantité $\frac{dS}{dt}$ est appelée **vitesse aréolaire**. Par intégration entre deux instants t_1 et t_2 on obtient la surface balayée durant cet intervalle de temps

$$S_{12}=C\int_{t_1}^{t_2}dt=C\left(t_2-t_1\right)$$

Conséquences:

1. l'aire balayée entre deux instants est proportionnelle à l'intervalle de temps correspondant. C'est la deuxième loi de Kepler (ou loi des aires).

2. le plan $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ est fixe car $\vec{r}\times m\vec{V}=\text{constante}$. Donc, la trajectoire d'une planète dans un cadre idéal (en négligeant les interactions avec les autres corps célestes) est plane.

VII. PSEUDO-FORCES OU FORCES D'INERTIE

Nous avons vu que la deuxième loi de Newton, $\vec{F}=m\vec{a}$, est valable dans n'importe quel repère d'inertie. Nous allons voir, dans cette partie, l'incidence de l'utilisation d'un repère non-galiléen.

VII.1. Cas d'un mouvement circulaire

Considérons une balle de poids $\vec{P}$ reliée par un fil inextensible à l'axe d'une plateforme tournant avec une vitesse de rotation constante (figure III.33). Au bout d'un certain temps, cette balle est entraînée dans un mouvement giratoire de même vitesse angulaire. Ce dernier état est perçu de deux façons différentes par un observateur fixe et par un autre qui se trouve entrainé sur la plateforme.

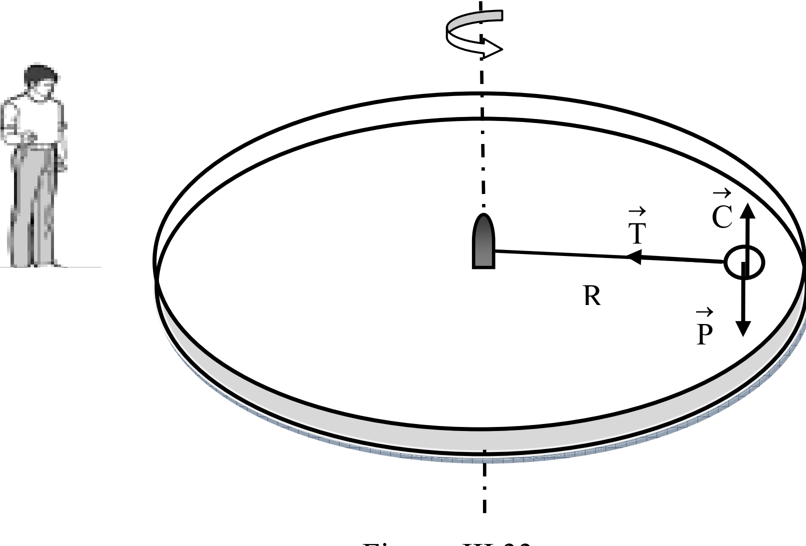


Figure III.33

Pour l'observateur (inertiel) au sol, la balle qui subit le poids $\vec{P}$, la force de contact $\vec{C}$ avec la plateforme et la tension $\vec{T}$ du fil, est en mouvement circulaire uniforme. Il applique la deuxième loi de Newton :

$$\underbrace{\vec{P}+\vec{C}}_{0}+\vec{T}=m\,\vec{a} \quad \text{soit} \quad \left|\vec{T}\right|=m\frac{V^2}{R}$$

R étant la distance de la balle au centre de la plateforme.

Pour l'observateur (non-inertiel) porté par la plateforme (figure III.34), la balle n'est pas en mouvement par rapport à lui et il conclut qu'elle est en équilibre sous l'effet de deux forces radiales, $\vec{F}_{in}$ et $\vec{T}$, et de deux forces verticales, $\vec{P}$ et $\vec{C}$. Dans ces conditions, la deuxième loi de Newton s'écrit:

$$\underbrace{\vec{P}+\vec{C}}_{0}+\vec{T}+\vec{F}_{in}=0, \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{in}=-\vec{T}$$

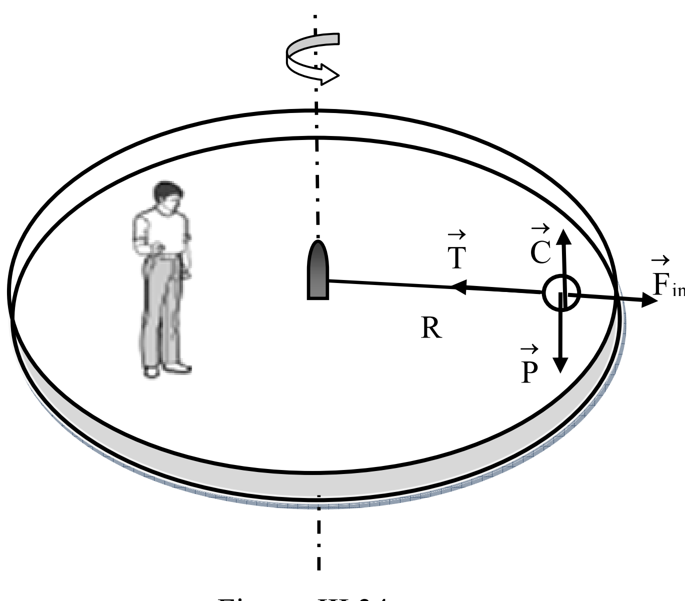
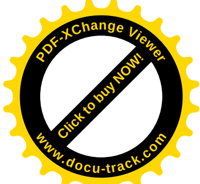


Figure III.34





$\vec{F}_{in}$ est une force dirigée vers l'extérieur. Elle est d'origine immatérielle puisqu'il n'y a pas de corps qui en soit la cause. On l'appelle **force d'inertie**.

En comparant les deux résultats on conclut que :

$$\vec{F}_{in} = -\vec{T} = -m\vec{a} \quad \text{et} \quad \left|\vec{F}_{in}\right| = m\frac{V^2}{R}$$

Dans ce cas de mouvement circulaire, cette force est appelée **force centrifuge**.

VII.2. Cas d'un mouvement rectiligne

Considérons un pendule simple constitué d'une masse m suspendue par un fil inextensible au plafond d'un véhicule en mouvement uniformément accéléré, d'accélération horizontale $\vec{a}$. Ce pendule forme un angle θ avec la verticale et l'analyse de son inclinaison n'est pas effectuée de la même façon par un observateur fixe et par un autre qui se trouve dans le véhicule.

Pour l'observateur (inertiel) au sol (figure III.35), les forces exercées sur le pendule sont le poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil. Il applique ainsi la deuxième loi de Newton en constatant que le pendule est entraîné par le véhicule avec l'accélération $\vec{a}$:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

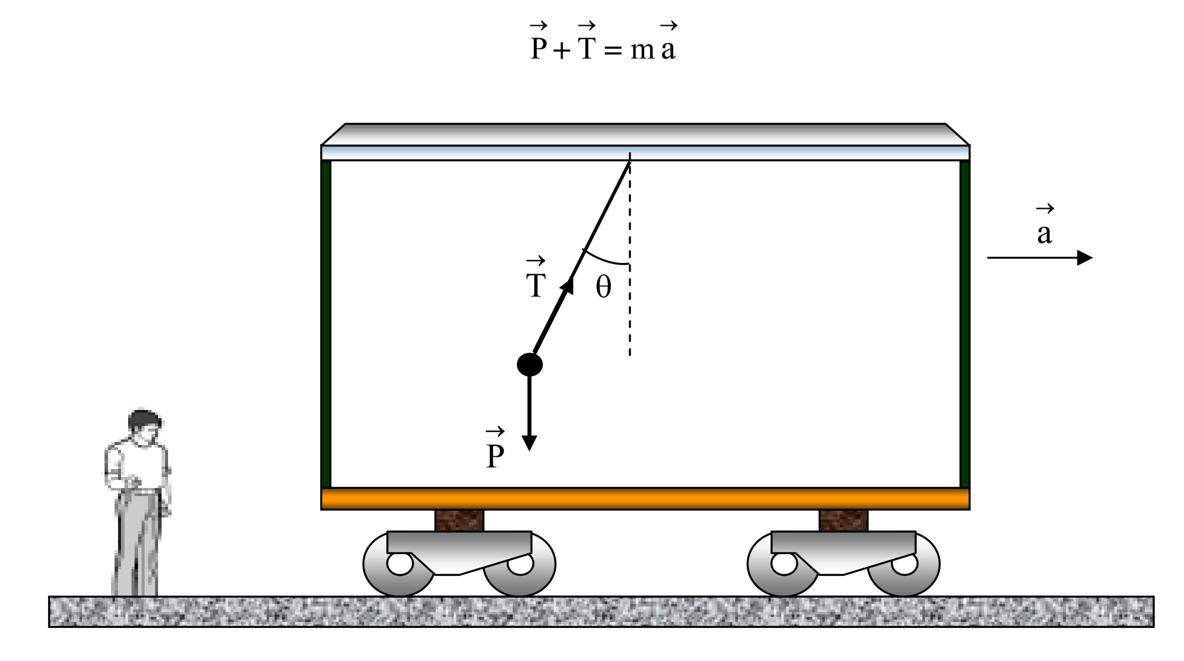


Figure III.35

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

L'observateur (non-inertiel) se trouvant dans le véhicule (figure III.36), voit le pendule immobile et conclut que le poids ne pouvant équilibrer la tension du fil, une troisième force $\vec{F}_{in}$ devrait intervenir. Il formule ainsi la deuxième loi de Newton :

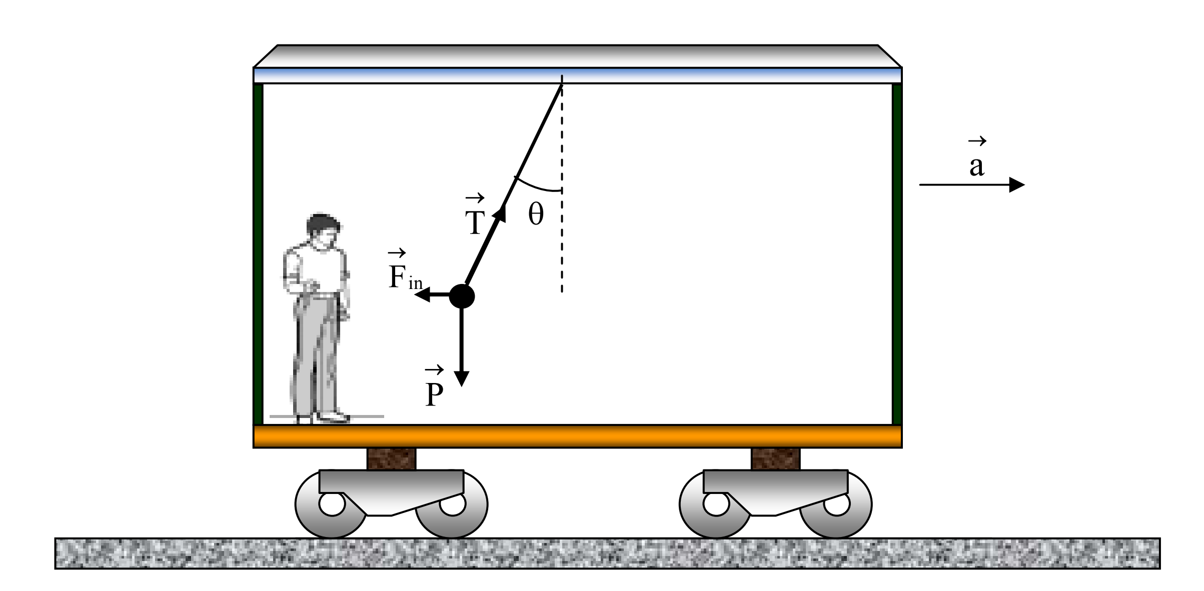


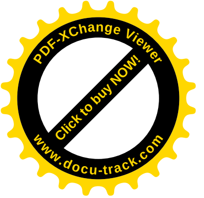
Figure III.36

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_{in}=0$$

En comparant ces deux dernières équations, il conclut que

$$\vec{F}_{in}=-m\,\vec{a}$$

Cette force est d'origine immatérielle puisqu'il n'y a pas de corps qui en soit la cause. C'est aussi une force d'inertie.


PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com



CHAPITRE IV

TRAVAIL ET ÉNERGIE

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, consacré à la dynamique, nous avons établi les relations qui existent entre un mouvement et les forces qui en sont la cause. En particulier, nous avons vu que la connaissance des forces qui agissent sur une particule et des conditions initiales (position et vitesse) peut permettre de prédire son mouvement. Cependant, on ne connait pas toujours toutes les forces en présence et même si c'est le cas, il arrive que les équations à résoudre soient difficiles à traiter. Dans ces conditions, on peut faire appel à des notions telles que le travail et l'énergie qui font l'objet de ce chapitre.

I. TRAVAIL D'UNE FORCE

I.1. Définitions

Si une particule subit un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ sous l'effet d'une force $\vec{F}$, cette dernière effectue un travail élémentaire dW défini par :

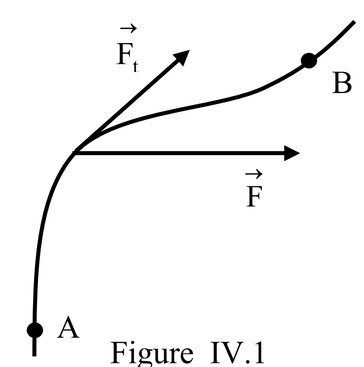


Figure IV.1

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(IV.1)}$$

Si la particule est déplacée d'un point A à un autre B (figure IV.1), le travail total est

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(IV.2)}$$

Remarquons que

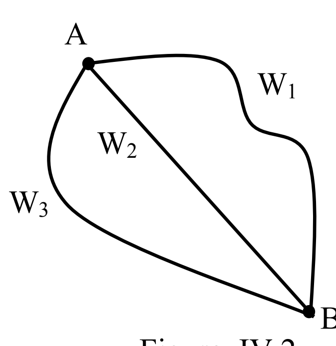
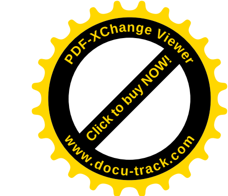


Figure IV.2

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|d\vec{r}\right|\cos\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_t\left|d\vec{r}\right| = F_t ds \qquad \text{(IV.3)}$$

où F_t est la composante tangentielle de $\vec{F}$ et s la coordonnée curviligne.





Ce qui donne :

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = \int_{s_A}^{s_B} F_t ds \qquad \text{(IV.4)}$$

Le travail W s'exprime en Joules (1 J = 1 Nm) .

Remarques :

- Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement son travail est nul.
- W est une grandeur algébrique : si W est positif le travail est appelé **travail moteur** ; dans le cas contraire il est dit **travail résistant**.
- Le travail dépend en général du chemin suivi entre A et B.

  Exemple : dans le cas de la figure IV.2, représentant trois chemins différents, le plus souvent on a :

$$W_1\left(\vec{F}\right)_A^B \neq W_2\left(\vec{F}\right)_A^B \neq W_3\left(\vec{F}\right)_A^B \qquad \text{(IV.5)}$$

I.2. Utilisation des coordonnées cartésiennes

En exprimant le produit scalaire en fonction des composantes de $\vec{F}$ et de $d\vec{r}$, soit

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad \text{(IV.6)}$$

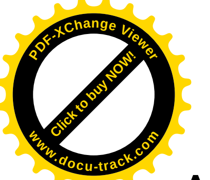
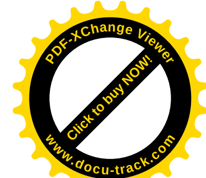
nous obtenons :

$$\begin{aligned} W\left(\vec{F}\right)_A^B &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz \end{aligned} \qquad \text{(IV.7)}$$

Remarque : si la force $\vec{F}$ est constante en grandeur et en direction l'expression de $W\left(\vec{F}\right)_A^B$ prend une forme plus simple:

$$\begin{aligned} W\left(\vec{F}\right)_A^B &= F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{y_A}^{y_B} dy + F_z \int_{z_A}^{z_B} dz \\ &= F_x\left(x_B - x_A\right) + F_y\left(y_B - y_A\right) + F_z\left(z_B - z_A\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV.8)}$$

Ce résultat montre que le travail ne dépend alors que des positions initiale et finale et non pas du chemin suivi. Le travail du poids en est une bonne illustration.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Application : Un corps de masse $m = 1\text{kg}$ est tiré avec une force $\vec{F}$ sur une distance de 10m, le long d'un plan incliné de 45° par rapport à l'horizontale (figure IV.3). Les frottements étant insignifiants et le mouvement accéléré, d'accélération $\left|\vec{a}\right| = 1\,\text{m/s}^2$, calculer les travaux des forces appliquées au corps :

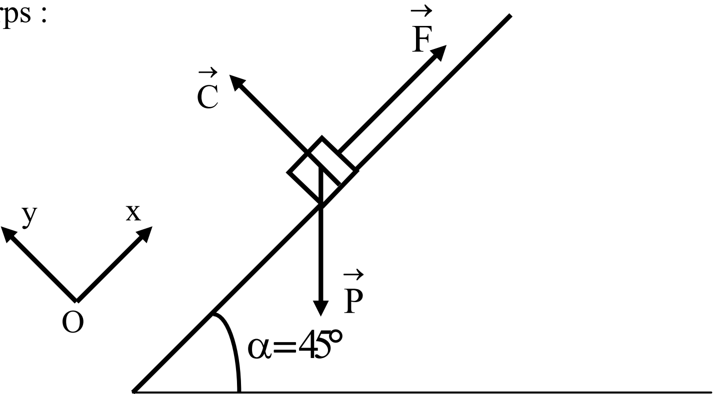


Figure IV.3

L'application de la deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$\vec{F}+\vec{P}+\vec{C}=m\,\vec{a} \qquad \text{(IV.9)}$$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes

$$\left(\sum F_{ext}\right)_x = F - P\sin\alpha = ma \qquad \text{(IV.10)}$$

$$\left(\sum F_{ext}\right)_y = C - P\cos\alpha = 0 \qquad \text{(IV.11)}$$

L'équation (IV.10) permet d'écrire :

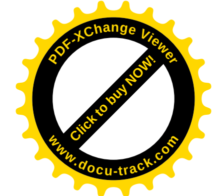
$$F = ma + P\sin\alpha = m\left(a + g\sin 45°\right) = 8.07\,\text{N}$$

Le travail de $\vec{F}$ est alors

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy$$
$$= F_x\left(x_B - x_A\right) + F_y\left(y_B - y_A\right)$$
$$= F\left(x_B - x_A\right) + 0\left(y_B - y_A\right)$$
$$= 8{,}07 \text{ x } 10 \;(\text{J})$$
$$= 80{,}7 \text{ J}$$

Le travail de $\vec{P}$ est donné par





$$\begin{aligned} W\left(\vec{P}\right)_A^B &= \int_{x_A}^{x_B} P_x dx + \int_{y_A}^{y_B} P_y dy \\ &= P_x\left(x_B - x_A\right) + P_y\left(y_B - y_A\right) \\ &= -\ P\sin\alpha\left(x_B - x_A\right) - P\cos\alpha \cdot (0) \\ &= -70{,}7\ \text{J} \end{aligned}$$

Les frottements étant négligeables, la force de contact $\vec{C}$ est alors perpendiculaire au plan, donc au déplacement, et son travail est nul.

I.3. Notion de puissance

Pour élever verticalement un corps d'une hauteur h, à vitesse constante, il faut lui appliquer une force $\vec{F}$ qui est telle que :

$$\vec{P} + \vec{F} = 0 \qquad \text{(IV.12)}$$

Soit

$$\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{P}\right| = mg \qquad \text{(IV.13)}$$

et

$$W\left(\vec{F}\right) = mgh \qquad \text{(IV.14)}$$

Ainsi, le temps n'apparaissant pas dans cette expression, la valeur du travail est la même que ce déplacement ait duré une seconde ou une année. Pour tenir compte de la vitesse d'exécution de ce travail, on définit la puissance qui est la vitesse de variation du travail par rapport au temps :

$$p = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(IV.15)}$$

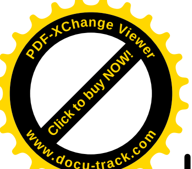
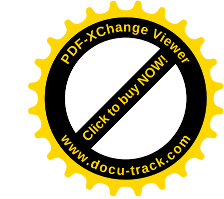
En développant le travail élémentaire on obtient :

$$p = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \qquad \text{(IV.16)}$$

La puissance moyenne développée entre deux instants t_i et t_f est :

$$p_m = \frac{W\big|_{t_i}^{t_f}}{\Delta t} \qquad \text{(IV.17)}$$

La puissance s'exprime en Watts (W).

II. ENERGIE CINETIQUE

II.1. Définition

Soit une particule qui se déplace sous l'action d'une force résultante $\vec{F}$ entre deux points A et B. La deuxième loi de Newton étant applicable le long du chemin A→B, on pourra l’utiliser dans l'expression du travail. En effet,

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(IV.18)}$$

Sachant que
$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ d\vec{r} = \vec{V}dt \end{cases}$$

il vient

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = m\int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V}dt = m\int_{V_A}^{V_B} \vec{V}\cdot d\vec{V} = \frac{1}{2}m\left(V_B^2 - V_A^2\right) \qquad \text{(IV.19)}$$

soit :

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = \Delta\left(\frac{1}{2}mV^2\right)_A^B \qquad \text{(IV.20)}$$

par définition, la quantité :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 \qquad \text{(IV.21)}$$

est appelée **énergie cinétique** ; elle se mesure en Joules.

II.2.Théorème de l’énergie cinétique

La relation

$$W\left(\vec{F}\right)_A^B = \Delta\left(\frac{1}{2}mV^2\right)_A^B = \Delta E_C\Big|_A^B \qquad \text{(IV.22)}$$

exprime le **théorème de l'énergie cinétique** qui s’énonce comme suit :

Lorsqu'un corps se déplace entre deux points A et B, sous l'action d'une force résultante $\vec{F}$, le travail de cette force est, quelque soient le chemin suivi et la nature des forces, égal à la variation de l'énergie cinétique du corps.

Remarques :

- L'énergie cinétique est toujours positive.
- Si le corps est soumis à plusieurs forces, de résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, alors :

$$\Delta Ec\Big|_A^B = \sum_i W_i\left(\vec{F}_i\right)_A^B = W_1\left(\vec{F}_1\right)_A^B + W_2\left(\vec{F}_2\right)_A^B + W_3\left(\vec{F}_3\right)_A^B + ...$$

- $\vec{\mathcal{P}} = m\vec{V}$ étant la quantité de mouvement, il vient :

$$\mathcal{P}^2 = m^2 V^2 \Rightarrow Ec = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} \qquad \text{(IV.23)}$$

- Si $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement son travail est nul et, en conséquence, l'énergie cinétique est constante.

III. FORCES CONSERVATIVES ET ENERGIE POTENTIELLE

III.1. Forces conservatives

Une force $\vec{F}$ est dite **conservative** si elle vérifie une de ces deux conditions qui sont équivalentes :

- **Première condition** : le travail de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Cette indépendance par rapport au chemin suivi implique que pour la figure IV.4:

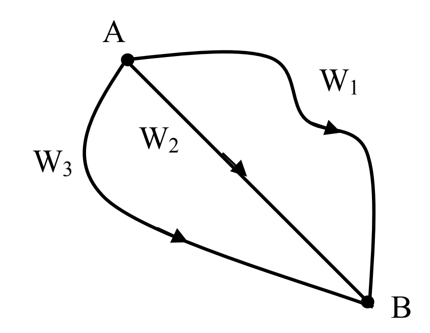


Figure IV.4

$$W_1\left(\vec{F}\right)_A^B = W_2\left(\vec{F}\right)_A^B = W_3\left(\vec{F}\right)_A^B \qquad \text{(IV.24)}$$

Soit

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_3 \qquad \text{(IV.25)}$$



- **Deuxième condition**: le travail total sur un chemin fermé (soit un aller et retour) est nul.

En effet, d'après l'indépendance du travail par rapport au chemin suivi :

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 \Rightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 - \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = 0 \qquad \text{(IV.26)}$$

ce qui s'écrit

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = 0 \quad \text{soit} \quad W_1\left(\vec{F}\right)_A^B + W_2\left(\vec{F}\right)_B^A = 0 \qquad \text{(IV.27)}$$

Remarques :

- Le travail effectué par une force conservative ne dépendant pas de la trajectoire, cette force doit dépendre uniquement de la position et non de la vitesse, ni du temps.
- Exemple de forces conservatives : les forces élastiques, gravitationnelles et électriques.

III.2. Concept d'énergie potentielle

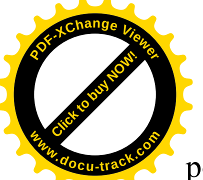
a. Première expérience

Considérons le système masse-ressort de la figure IV.5, en l'absence de frottements avec le sol. On déplace la masse de façon à comprimer le ressort d'une longueur *a*, puis on abandonne le système à lui-même. La masse effectue alors des oscillations, d'amplitude *a*, centrées en O. La partie de gauche de la figure représente, sur un cycle, des configurations caractéristiques de ce mouvement.

En bout de course, c'est-à-dire en $x = \pm\, a$, la masse n'a pas d'énergie cinétique puisque sa vitesse est nulle. Cependant elle se remet en mouvement vers la position d'équilibre x = 0 avec une vitesse croissante. Cela veut dire qu'elle acquiert de l'énergie cinétique. Comme l'énergie ne se crée pas, elle provient de la transformation d'une forme d'énergie due à l'état (de compression ou d'étirement) du système masse-ressort. Cette énergie est appelée **énergie potentielle** (symbole Ep).

Au-delà du point d'équilibre, la masse subit un ralentissement jusqu'au point extrême suivant, au cours duquel elle perd toute son énergie cinétique. En fait le système récupère de l'énergie potentielle qu'il réutilise pour renvoyer la masse vers la position d'équilibre. Ce mouvement est alors entretenu par une succession de transformations d'énergie potentielle en énergie cinétique et d'énergie cinétique en énergie potentielle. Ceci est vrai lorsque les frottements sont absents.

Remarquons que la force qui est responsable de ce mouvement est la force élastique qui est conservative (le poids et la force de contact se neutralisent). De ce fait, l'énergie



potentielle associée est désignée par **énergie potentielle élastique**. Par ailleurs, l'expérience est reproductible, c'est-à-dire que lorsqu'elle est refaite on obtient les mêmes résultats. De plus, si on modifie l'amplitude « *a* » l'énergie potentielle va varier quantitativement. Cela veut dire qu'elle dépend de la positon occupée par la masse.

Energie cinétique

Energie potentielle

$\vec{V} = 0$ — Maximum de compression

$\vec{V}$

$\vec{V}$ — Maximum de vitesse

$\vec{V}$

$\vec{V} = 0$ — Maximum d'extension

$\vec{V}$

$\vec{V}$ — Maximum de vitesse

$\vec{V}$

$\vec{V} = 0$ — Maximum de compression

-a 0 a x

Figure IV.5



b. Deuxième expérience

Considérons la chute libre d'un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur *h* par rapport au sol (figure IV.6). L'objet se met en mouvement sous l'action de son poids, une force conservative que la terre exerce sur lui. Au départ l'objet n'a pas d'énergie cinétique puisque sa vitesse est nulle. Par conséquent, l'état du système terre-objet fait que ce dernier possède une **énergie potentielle** dite **gravitationnelle** qu'il peut transformer en énergie cinétique. Comme l'expérience est reproductible, cela veut dire que le corps récupère son énergie potentielle à chaque fois qu'il revient à sa position initiale. En changeant la hauteur de la chute et en étudiant l'énergie cinétique obtenue il apparaît que cette énergie potentielle dépend de la position de l'objet.

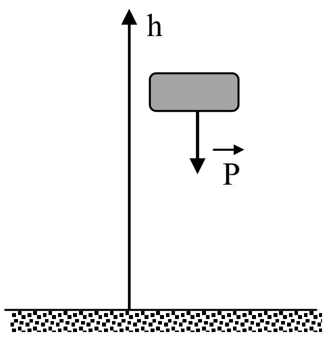


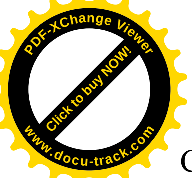
Figure IV.6

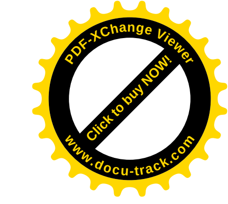
Considérons maintenant le cas où le même corps est lancé vers le haut, à partir du sol, avec une vitesse $\vec{V}_0$, donc une énergie cinétique $mV_0^2/2$. Arrivé à une certaine hauteur *h*, sa vitesse s'annule (ayant perdu toute son énergie cinétique) ; il effectue alors une chute libre analogue à celle décrite précédemment. Ainsi, entre le sol et le point de rebroussement, le corps a transformé son énergie cinétique en énergie potentielle qu'il retransforme en énergie cinétique en retombant.

III.3. Energie mécanique totale

Nous avons vu que l'énergie potentielle E_P d'un corps est une énergie due à l'état du système responsable de la force conservative qu'il subit. Cette énergie, qui dépend de la position occupée par le corps, peut être transformée en énergie cinétique E_C et le corps la récupère lorsqu'il retrouve son état initial. Ainsi, le système peut transformer l'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa. Considérons le déplacement d'une particule sous l'effet d'une force conservative :

- si le corps a perdu une quantité d'énergie potentielle $\Delta E_P(<0)$, il gagne une quantité d'énergie cinétique $\Delta E_C(>0)$;
- si le corps a perdu une quantité d'énergie cinétique $\Delta E_C(<0)$, il gagne une quantité d'énergie potentielle $\Delta E_P(>0)$.





Compte tenu des signes des deux quantités, on a dans tous les cas l'égalité :

$$\Delta E_P = -\Delta E_C \qquad (IV.28)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\Delta E_P + \Delta E_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\left(E_P + E_C\right) = 0 \qquad (IV.29)$$

soit

$$E_P + E_C = \text{constante} \qquad (IV.30)$$

La quantité $E_T = E_P + E_C$ représente **l'énergie mécanique totale** de la particule.

Théorème : l'énergie mécanique totale d'une particule soumise à des forces conservatives est constante.

III.4. Détermination de l'énergie potentielle

a. Méthode

Considérons un corps qui se déplace entre deux positions, $A_0\left(\vec{r}_0\right)$ et $A\left(\vec{r}\right)$, sous l'effet d'une force conservative $\vec{F}$. Le théorème de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$\Delta E_P\Big|_{Ao}^{A} = -\Delta E_C\Big|_{Ao}^{A} \qquad (IV.31)$$

En vertu du théorème de l'énergie cinétique,

$$\Delta E_P\Big|_{Ao}^{A} = -\Delta E_C\Big|_{Ao}^{A} = -W\left(\vec{F}\right)_{Ao}^{A} = -\int_{Ao}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (IV.32)$$

soit

$$E_P\left(A\right) - E_P\left(A_0\right) = -\int_{Ao}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (IV.33)$$

Ainsi, il apparaît que pour déterminer l'énergie potentielle en n'importe quel point A, il faut connaître celle d'un point de référence A_0. Souvent, A_0 est choisi, par convention, à l'endroit où la force $\vec{F}$ est nulle (lorsque cela est possible) et on donne arbitrairement la valeur zéro à $E_P\left(A_0\right)$.

b. Energie potentielle élastique

Revenons au système masse-ressort du paragraphe III.2.a. La déformation du ressort étant représentée par x, la force élastique appliquée par le ressort est donc :

$$\vec{F} = -kx\,\vec{i} \qquad \text{(IV.34)}$$

Cette force s'annule à l'origine $(x=0)$ que nous utiliserons comme point de référence. En conséquence,

$$E_P(x) - \underbrace{E_P(0)}_{0} = -\int_0^x F\cdot dx = -\int_0^x (-kx)\cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(IV.35)}$$

De façon générale, l'énergie potentielle associée à une force élastique $\vec{F} = -k\,\vec{\Delta l}$, dans le cas d'une une déformation $\vec{\Delta l}$, est donnée par

$$E_P(\Delta l) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \qquad \text{(IV.36)}$$

c. Energie potentielle gravitationnelle

Considérons un corps de masse m se déplaçant sous l'effet de la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ que la terre exerce sur lui (figure IV.7), soit :

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_T\, m}{r^2}\vec{u}$$

Il est évident que cette force s'annule à l'infini que nous considérerons comme référence :

$$E_P(r) = -\int_\infty^r \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r \left(-G\frac{M_T\, m}{r^2}\right)\vec{u}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(IV.37)}$$

Notons que

$$\vec{u}\cdot d\vec{r} = \left|\vec{u}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\left(\vec{u}, d\vec{r}\right) = dr \qquad \text{(IV.38)}$$

d'où

$$E_P(r) = -GM_T m\int_\infty^r \left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = -G\frac{M_T\, m}{r} \qquad \text{(IV.39)}$$

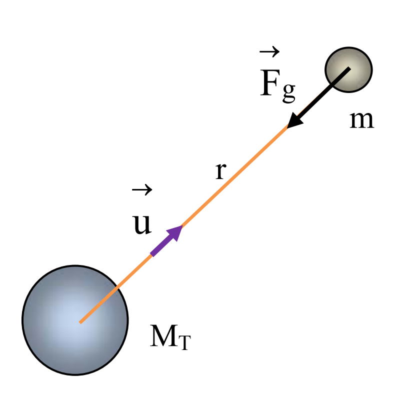
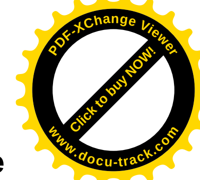


Figure IV.7

d. Energie potentielle gravitationnelle au voisinage de la terre (ou énergie potentielle de pesanteur)

Considérons un corps de masse m se déplaçant sous l'effet de son poids entre deux points A et B. La variation de son énergie potentielle s'obtient en écrivant:

$$\Delta E_P\big|_A^B = -\Delta E_C\big|_A^B = -W\left(\vec{P}\right)_A^B \qquad \text{(IV.40)}$$

Le travail de $\vec{P}$ est donné par

$$W\left(\vec{P}\right)_A^B = \int_{x_A}^{x_B} P_x dx + \int_{y_A}^{y_B} P_y dy$$
$$= P_x\left(x_B - x_A\right) + P_y\left(y_B - y_A\right) \qquad \text{(IV.41)}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes d'axe (Oy) vertical ascendant, les composantes de $\vec{P}$ sont : $P_x = 0$; $P_y = -mg$. En conséquence,

$$\Delta E_P\big|_A^B = -W\left(\vec{P}\right)_A^B = mg\left(y_B - y_A\right) \qquad \text{(IV.42)}$$

Ce résultat étant valable quelque soient les points A et B, nous pouvons écrire de façon générale:

$$\Delta E_P = mg\Delta y \qquad \text{(IV.43)}$$

Par convention, on donne la valeur zéro à E_P en y = 0. L'énergie potentielle s'exprime alors :

$$E_P(y) = mgy \qquad \text{(IV.44)}$$

Il est possible de choisir le niveau de référence pour l'énergie potentielle (E_P=0) à une altitude quelconque. On introduit alors un axe vertical ascendant dont l'origine est située à ce niveau de référence et l'énergie potentielle de la pesanteur s'écrit :

$$E_P(h) = mgh \qquad \text{(IV.45)}$$

où h est la coordonnée de la position sur cet axe.

Exemple : Considérons un corps se déplaçant sur une trajectoire ayant la forme d'un quart-de-cercle de rayon R et située dans le plan vertical (O, x, y). Nous nous proposons d'exprimer les énergies potentielles gravitationnelles du mobile pour les deux positions M et N et les deux niveaux de références O et O' de la figure IV.8.

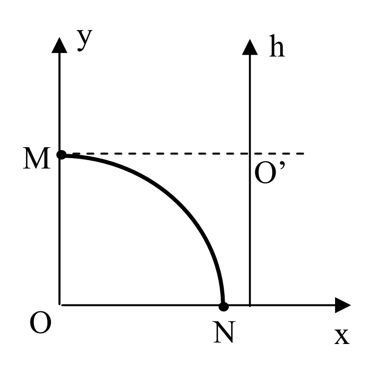
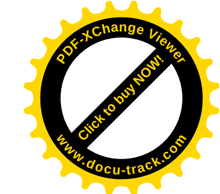


Figure IV.8





Position	**Référence : O**	**Référence : O′**
M	mgR	0
N	0	- mgR

Tableau IV.1

e. Etude de quelques exemples

Pour une particule en mouvement sous l'effet de forces conservatives, l'énergie totale est constante. Pour la calculer, il faut chercher une position où la vitesse est connue.

α. Particule dans un champ de force élastique

Revenons au système masse-ressort du paragraphe III.2.a. La déformation du ressort étant représentée par x, l'énergie potentielle de la masse est

$$E_P(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \text{(IV.46)}$$

Son énergie totale est alors

$$E_T = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m V^2 \qquad \text{(IV.47)}$$

Sachant que la vitesse est nulle au point d'élongation maximale, $x = a$, on obtient

$$E_T = \frac{1}{2} k a^2 \qquad \text{(IV.48)}$$

Soit, en n'importe quel point d'abscisse x

$$E_T = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} k a^2 \qquad \text{(IV.49)}$$

Ainsi, l'énergie cinétique en ce point est :

$$E_C(x) = \frac{1}{2} m V^2 = E_T - E_P = \frac{1}{2} k \left(a^2 - x^2\right) \qquad \text{(IV.50)}$$

Par conséquent, la vitesse en un point d'abscisse x est donnée par la relation

$$V = \sqrt{\frac{k}{m}\left(a^2 - x^2\right)} \qquad \text{(IV.51)}$$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Le diagramme des énergies de la figure IV.9, ci-dessous, montre bien le fait que toute diminution d'énergie potentielle est accompagnée par une augmentation de la même quantité d'énergie cinétique.

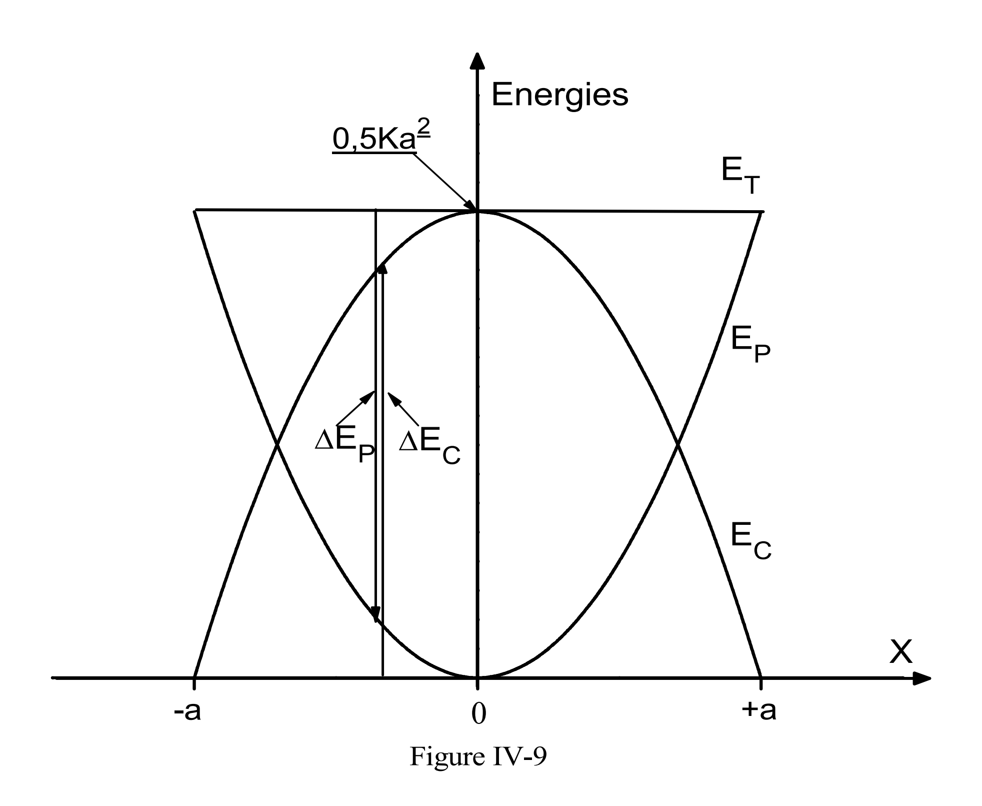


Figure IV-9

β. Mouvement d'un projectile lancé vers le ciel à partir du sol - Vitesse de libération

Soit $\vec{V}_0$ la vitesse initiale d'un projectile lancé vers le ciel. Son énergie potentielle gravitationnelle est donnée par l'expression :

$$E_P(r) = -G\frac{M_T\, m}{r} \tag{IV.52}$$

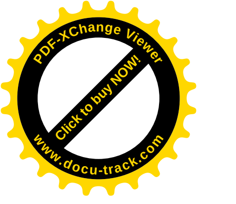
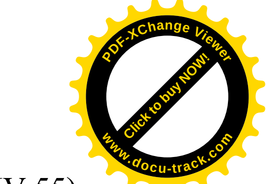
où r est la distance qui le sépare du centre de la terre, m sa masse et M_T celle de la terre. Son énergie mécanique totale est alors

$$E_T = -G\frac{M_T\, m}{r} + \frac{1}{2}mV^2 = \text{constante} \tag{IV.53}$$

En utilisant les conditions initiales $r = R_T$ (le rayon de la terre) et $V=V_0$, il vient

$$E_T = -G\frac{M_T\, m}{r} + \frac{1}{2}mV^2 = -G\frac{M_T\, m}{R_T} + \frac{1}{2}mV_0^2 \tag{IV.54}$$

L'énergie cinétique en n'importe quel point de la trajectoire est alors

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2 = G \frac{M_T\, m}{r} - G \frac{M_T\, m}{R_T} + \frac{1}{2} m V_0^2 \qquad \text{(IV.55)}$$

Le diagramme des différentes énergies est représenté sur la figure IV.10.

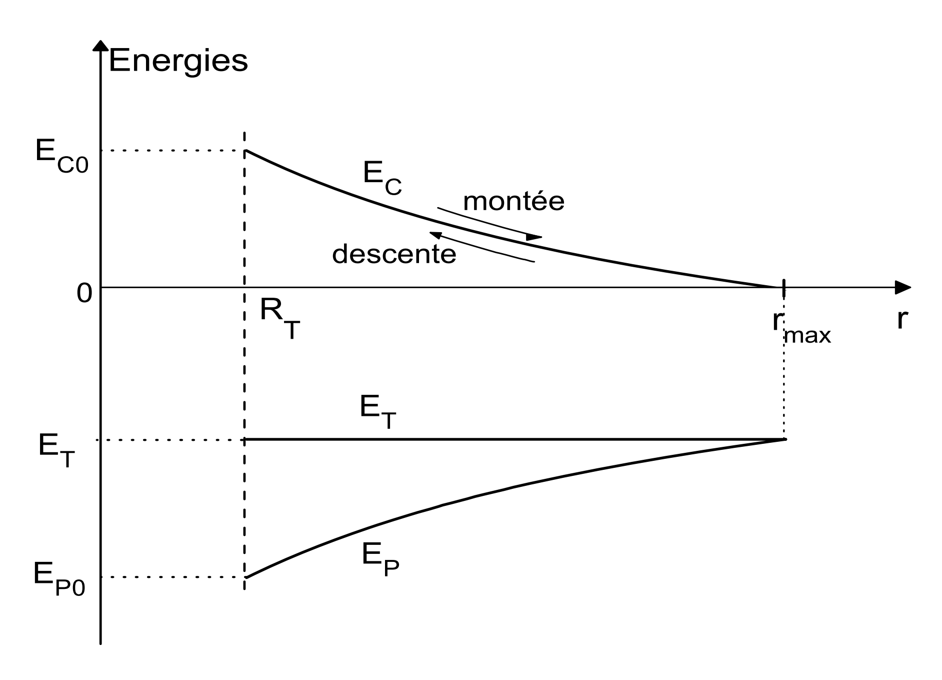


Figure IV-10

La distance r_{max} correspond au point d'altitude maximale atteint avant d'effectuer une chute libre qui ramène le corps vers la terre. Pour que le projectile puisse se libérer de l'attraction de la terre il faut admettre que, s'il n'était que sous le seul effet de la gravitation terrestre, sa vitesse initiale lui permettrait d'aller vers l'infini où son énergie cinétique serait nulle. Son énergie mécanique totale est alors

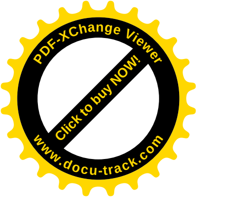
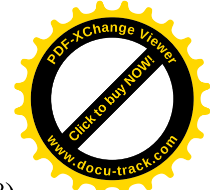
$$E_T = \underbrace{-G \frac{M_T\, m}{r_\infty}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2} m V_\infty^2}_{0} = -G \frac{M_T\, m}{R_T} + \frac{1}{2} m V_0^2 = 0 \qquad \text{(IV.56)}$$

D'où la vitesse de libération du projectile

$$V_0 = \sqrt{2G \frac{M_T}{R_T}} \qquad \text{(IV.57)}$$

III.5. Forces conservatives et énergie potentielle

Commençons par considérer le mouvement d'une particule contrainte à se déplacer sous l'effet d'une force conservative $\vec{F}$. Dans ce cas, sa variation d'énergie potentielle, entre deux points A_0 et A_1, est donnée par la relation

$$\Delta E_P\Big|_{A_0}^{A_1} = -\int_{Ao}^{A_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(IV.58)}$$

Pour un déplacement élémentaire, cette relation devient

$$dE_P = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \qquad \text{(IV.59)}$$

Par ailleurs, rappelons que si une fonction $f(x,y,z)$ est continûment dérivable, c'est-à-dire que les dérivées partielles $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ et $\partial f/\partial z$ existent et sont continues, on définit son gradient, qu'on écrit $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, comme étant le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de cette fonction, soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \text{(IV.60)}$$

La différence

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) \qquad \text{(IV.61)}$$

est appelée différentielle df de la fonction f qui s'exprime par le produit scalaire :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad \text{(IV.62)}$$

Ainsi, la différentielle de l'énergie potentielle s'écrit :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz \qquad \text{(IV.63)}$$

En comparant les équations (IV.59) et (IV.63), on obtient par identification :

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} \qquad \text{(IV.64)}$$

On dit que la force $\vec{F}$ dérive du potentiel $E_P\left(\vec{r}\right)$ ou qu'elle est reliée à son gradient par la relation

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = -\vec{\nabla} E_p$$

En coordonnées polaires, le gradient s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \qquad \text{(IV.65)}$$

soit

$$\vec{F}(r,\theta) = -\frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \qquad \text{(IV.66)}$$

III.6. Les diagrammes d'énergie potentielle

Considérons une particule qui se déplace sous l'effet d'une force conservative $\vec{F}$. L'étude du diagramme de son énergie potentielle peut fournir des renseignements concernant la nature de son mouvement. Nous allons illustrer la procédure en nous basant sur l'exemple d'une particule qui se déplace le long de l'axe (x'Ox) avec l'énergie potentielle représentée dans la figure (IV.11).

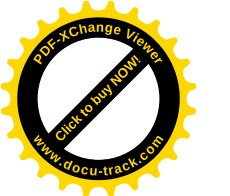
Figure IV.11

a. Détermination de la force à partir du diagramme Ep (x)

La force conservative et l'énergie potentielle associée sont reliées par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = -\vec{\nabla} E_p \qquad \text{(IV.67)}$$

soit, dans notre cas




$$F_x(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = - \text{ la pente de la tangente au graphe de } E_p(x) \qquad \text{(IV.68)}$$

Ainsi, on peut facilement déterminer $F_x(x)$ en évaluant graphiquement la pente de la tangente au diagramme d'énergie potentielle.

b. Détermination des positions d'équilibres

Dans notre cas, le champ de force est une simple fonction F(x) et la force pointe vers la droite si $F_x > 0$, vers la gauche si $F_x < 0$. On dit qu'un point d'abscisse x_0 est un point d'équilibre si la force est nulle à cet endroit $F(x_0) = 0$; autrement dit, si la dérivée de l'énergie potentielle s'annule en x_0. Il s'agit d'un équilibre au sens où si la particule est posée en ce point sans vitesse initiale, elle resterait immobile.

On qualifie l'équilibre de **stable** si, lorsqu'on écarte légèrement la particule de x_0, la force tend à la faire revenir vers cette position. Cela correspond à un minimum dans le diagramme d'énergie potentielle. Cette condition est remplie si la dérivée première de l'énergie potentielle est nulle et sa dérivée seconde est positive au point x_0 (concavité vers le haut). Le diagramme d'énergie potentielle étudié fait apparaître deux points d'équilibres stables: $C(x = -2\,m)$ et $G(x{=}3\,m)$.

Dans le cas où x_0 correspond à un maximum dans le diagramme d'énergie potentielle, la force a tendance à éloigner la particule de x_0 si cette dernière en est légèrement déplacée et l´équilibre est qualifié **d'instable**. La dérivée première de l'énergie potentielle y est nulle et sa dérivée seconde est négative (concavité vers le bas). Sur le diagramme il n'y a qu'un seul point d'équilibre instable : l'origine O**.**

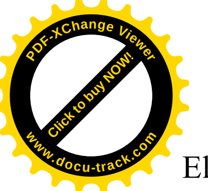
c. Détermination des points de rebroussement

Les points de rebroussement (ou points limites) sont les points où l'énergie cinétique s'annule. Pour les trouver il faut utiliser la relation

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 = E_T - E_P \qquad \text{(IV.69)}$$

Ces points où les énergies totale et potentielle sont égales délimitent la trajectoire de la particule. En effet, l'énergie cinétique étant une grandeur positive, la relation (IV.69) nous indique que le mouvement ne peut s'effectuer que dans la région $E_P(x) \le E_T$. Par exemple, si $E_T = -10\,J$, le diagramme d'énergie potentielle montre que les points F et H sont des points de rebroussement. La particule ne peut aller à gauche de F ou à droite de H où l'énergie potentielle est supérieure à $E_T = -10\,J$. Ce cas peut se produire, par exemple, si initialement elle est lâchée en F ou H sans vitesse initiale.

$$E_T = E_{P0} + E_{C0} = -10 + 0 = -10\,J \qquad \text{(IV.70)}$$



Elle effectuera un mouvement oscillatoire entre ces deux points suivant le schéma (figure IV.12).

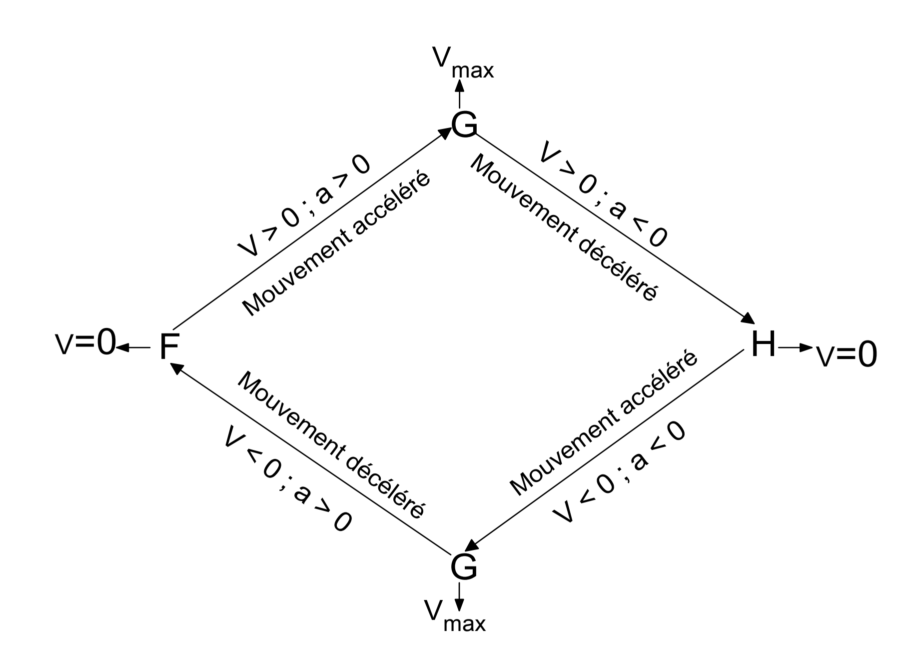


Figure IV.12

La portion (F′G′H′) de la courbe est appelée **puits de potentiel** parce que la particule ne peut pas quitter le segment (FH).

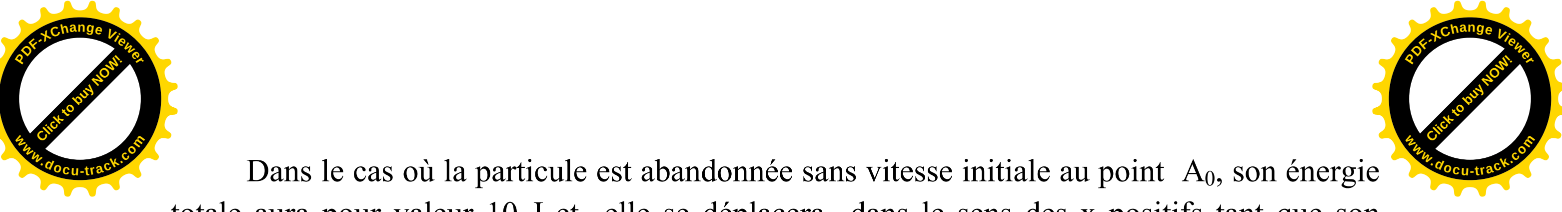
Si $E_T = -2,5\,J$, nous aurons quatre points de rebroussement (B, D, E, I) et deux puits de potentiel : (B′C′D′) et (E′G′I′). La particule oscillera dans l'un ou l'autre des deux puits mais ne peut pas passer de l'un à l'autre à cause de la portion (D′OE′) de la courbe d'énergie potentielle que l'on appelle **barrière de potentiel**. Par exemple,

- si initialement elle est lâchée en B ou en D sans vitesse initiale, elle oscillera entre B et D ;
- si initialement elle est lâchée en E ou en I sans vitesse initiale, elle oscillera entre E et I ;
- si initialement elle est lancée à partir de F vers la droite avec une énergie cinétique $E_C = 7,5\ J$, son énergie totale sera :

$$E_T = E_{P0} + E_{C0} = -10 + 7,5 = -2,5\ J$$

Le diagramme révèle que pour satisfaire la condition $E_P(x) \leq E_T$, elle atteindra le point I et ensuite oscillera entre E et I.

Dans le cas $E_T = +5\ J$, nous aurons deux points de rebroussement A et J et un puits de potentiel.



Dans le cas où la particule est abandonnée sans vitesse initiale au point A_0, son énergie totale aura pour valeur 10 J et elle se déplacera dans le sens des x positifs tant que son énergie potentielle restera inférieure à cette valeur (Ep < 10 J).

IV. ENERGIE MECANIQUE ET FORCES NON CONSERVATIVES

Rappelons que pour une particule se déplaçant sous l'effet de forces conservatives,

$$\begin{cases} \Delta E_T = \Delta E_P + \Delta E_C = 0 \\ \Delta E_C = \sum W\left(\vec{F}_C\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta E_P + \sum W\left(\vec{F}_C\right) = 0 \qquad (IV.71)$$

où $\sum W\left(\vec{F}_C\right)$ est le travail résultant des **forces conservatives**.

Si la particule est soumise à des forces conservatives et à des forces non conservatives

$$\begin{cases} \Delta E_T = \Delta E_P + \Delta E_C \\ \Delta E_C = \sum W\left(\vec{F}_C\right) + \sum W\left(\vec{F}_{NC}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta E_T = \underbrace{\Delta E_P + \sum W\left(\vec{F}_C\right)}_{0} + \sum W\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

soit

$$\Delta E_T = \sum W\left(\vec{F}_{NC}\right) \qquad (IV.72)$$

$\sum W\left(\vec{F}_{NC}\right)$ représente le travail résultant des **forces non conservatives**.

Théorème : La variation de l'énergie mécanique totale d'un corps est égale au travail résultant des **forces non conservatives** auxquelles il est soumis.

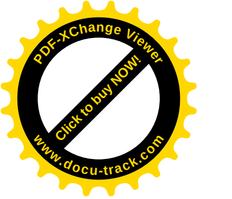
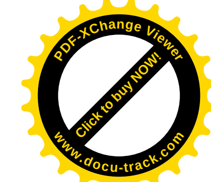
Nous citons à titre d'exemples les forces non conservatives suivantes :

a. la force de contact (hormis la force élastique) ;

b. la force magnétique ;

c. toutes les forces qui dépendent explicitement du temps ou de la vitesse.

Remarque : la force non conservative qui intervient souvent dans les exercices est la force de contact notée $\vec{C}$. Entre deux points A et B de la trajectoire suivie par le corps sur lequel elle s'applique, son travail est :

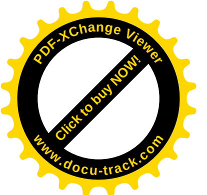
$$W\left(\vec{C}\right)_A^B = W\left(\vec{C}_{\parallel}\right)_A^B + \underbrace{W\left(\vec{C}_{\perp}\right)_A^B}_{0} \qquad \text{(IV.73)}$$

soit

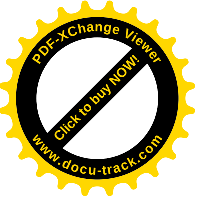
$$W\left(\vec{C}\right)_A^B = \int_A^B \vec{C}_{\parallel} \cdot d\,\vec{r} = -\int_{s_A}^{s_B} \left|\vec{C}_{\parallel}\right| \cdot ds \qquad \text{(IV.74)}$$

Dans le cas particulier où $\left|\vec{C}_{\parallel}\right|$ reste constant pendant le mouvement on aura :

$$W\left(\vec{C}\right)_A^B = -\left|\vec{C}_{\parallel}\right| \int_{s_A}^{s_B} ds = -\left|\vec{C}_{\parallel}\right| (s_B - s_A) \qquad \text{(IV.75)}$$


PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com


PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com





CHAPITRE V

SYSTEMES A PLUSIEURS PARTICULES

Dans le chapitre III nous avons introduit les principes de la dynamique classique, concernant un point matériel. Nous allons, dans ce qui suit, étudier la dynamique d'un système composé de plusieurs points matériels, c'est à dire l'étude dynamique d'un système discret. Un **système matériel discret** est un **ensemble fini** de points matériels.

I. INTRODUCTION

Les collisions et les chocs sont des interactions au cours desquelles des corps exercent les uns sur les autres, pendant un intervalle de temps court, des forces d'interaction. Ces dernières sont relativement élevées par rapport à celles provenant de l'environnement extérieur au système formé par les particules entrant en interaction.

La collision entre deux particules a lieu lorsqu'elles se dirigent l'une vers l'autre pour se percuter. Une collision peut se produire avec un contact physique (cas de la figure V.1.a), comme elle peut se produire par interaction à distance (cas de la figure V.1.b). Dans ce dernier cas l'interaction a lieu avec une force de très courte portée.

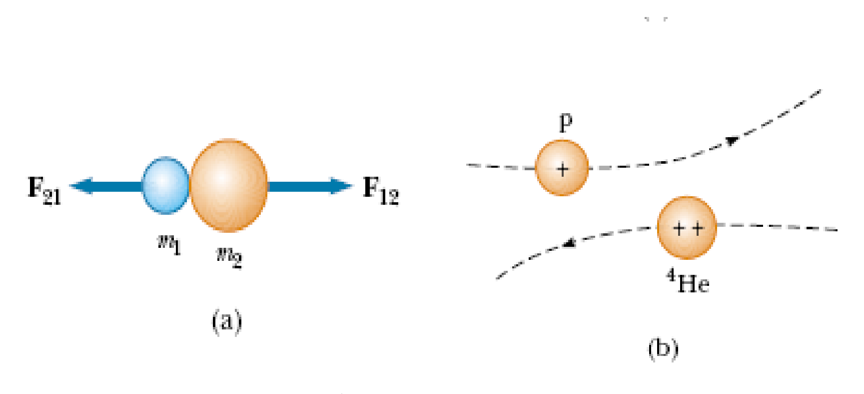


Figure V.1

La figure V.1.b représente une collision par interaction à distance entre un proton et le noyau d'un atome d'hélium. Les deux particules portant des charges de même signe ne peuvent pas entrer en contact physique en raison des forces électrostatiques, très fortes, qu'elles subissent lorsqu'elles sont très proches l'une de l'autre.

Une explosion est un événement durant lequel les constituants d'un système se repoussent pour se séparer, en exerçant des forces relativement élevées les uns sur les autres pendant un intervalle de temps court.

II. L'IMPULSION ET LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Considérons un système constitué de deux particules qui entrent en interaction. Pour chaque particule, nous avons vu qu'en mécanique newtonienne, la relation entre la force et le mouvement est donnée par la 2e loi de Newton:

$$\vec{R} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} \qquad \text{(V.1)}$$

où $\vec{R}$ est la résultante des forces extérieures appliquées sur la particule. Cette dernière subit une force $\vec{F}_{ext}$ provenant de l'environnement extérieur et une force $\vec{F}$ provenant de l'action de l'autre particule (figure V.2) :

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_{ext} \qquad \text{(V.2)}$$

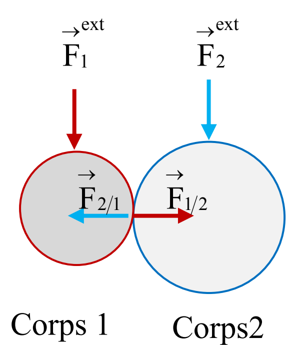


Figure V.2

On a alors

$$d\vec{\mathcal{P}} = \vec{R}\,dt$$

La variation de la quantité de mouvement entre le début de l'interaction à l'instant t_i et sa fin correspondant à l'instant t_f, s'obtient en intégrant cette relation :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{P}_f} d\vec{\mathcal{P}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}\,dt \qquad \text{(V.3)}$$

L'intégrale du membre de droite qui mesure à la fois la force de l'interaction et la durée de l'interaction est appelée impulsion $\vec{I}$ de la force $\vec{R}$ qui est la résultante des forces $\vec{F}$ et $\vec{F}_{ext}$.

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}\,dt \qquad \text{(V.4)}$$

Théorème: La variation de la quantité de mouvement d'une particule est égale à l'impulsion de la résultante des forces qui agissent sur la particule durant l'intervalle de temps considéré.

Remarque : Nous pouvons développer la relation (V.3) en écrivant :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{P}_f} d\vec{\mathcal{P}} = \int_{t_i}^{t_f} \left(\vec{F} + \vec{F}_{ext}\right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt + \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext}\,dt \qquad \text{(V.5)}$$

En général, la durée des chocs est suffisamment faible pour que l'impulsion des forces extérieures ne provoque pas une variation de quantité de mouvement significative. Il devient raisonnable de considérer que le système des deux particules est isolé et d'écrire :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \text{impulsion de } \vec{F} \qquad (V.6)$$

Cette relation vaut pour chaque composante :

$$\Delta\mathcal{P}_x = I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt \qquad (V.7)$$

$$\Delta\mathcal{P}_y = I_y = \int_{t_i}^{t_f} F_y dt \qquad (V.8)$$

$$\Delta\mathcal{P}_z = I_z = \int_{t_i}^{t_f} F_z dt \qquad (V.9)$$

Si l'on s'intéresse maintenant au système formé par les deux particules, la variation de la quantité de mouvement totale durant l'interaction est :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}}_{12} = \int_{t_i}^{t_f} \Big(\underbrace{\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1}}_{0} \Big) dt = 0 \qquad (V.10)$$

En effet, en vertu de la troisième loi de Newton, la force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par la particule « 1 » sur la particule « 2 » est opposée à $\vec{F}_{2/1}$ exercée par la particule « 2 » sur la particule « 1 ». Le principe de conservation de la quantité de mouvement du système formé par les deux particules est donc vérifié au cours de la collision.

III. COLLISIONS DE PARTICULES ISOLEES

On doit pouvoir diviser le temps ainsi : avant, durant et après la collision, comme le suggère la figure V.3.

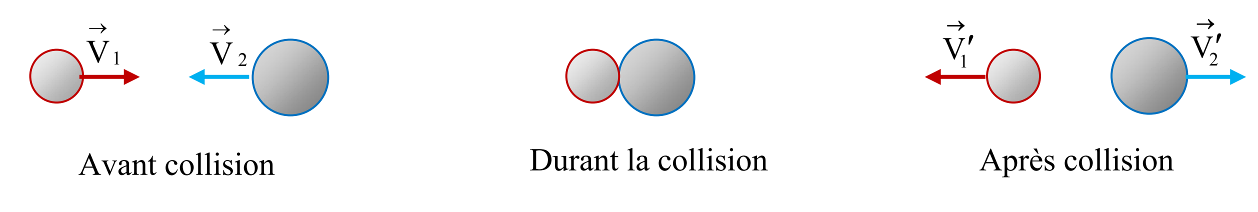


Figure V.3

Ici, le principe de conservation de la quantité de mouvement du système formé par les particules est donc vérifié avant et après la collision.



$$\underbrace{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}_{\vec{\mathcal{P}}} = \underbrace{m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2}_{\vec{\mathcal{P}}'} \qquad \text{(V.11)}$$

Les collisions sont classifiées sur la base de considérations énergétiques. Une collision est dite **élastique** lorsque l'énergie cinétique totale du système est conservée. Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il y a perte d'énergie cinétique totale, la collision est **inélastique** même si la quantité de mouvement totale est conservée. Si, en plus, les deux particules ont la même vitesse après l'interaction, en restant collées l'une à l'autre, la collision est qualifiée de **parfaitement inélastique**. En réalité les collisions entre objets macroscopiques sont toujours inélastiques. En effet, les frottements font qu'une partie de l'énergie est perdue sous forme de chaleur. Par ailleurs, si la collision provoque une déformation, comme dans le cas d'un choc entre deux voitures, ce phénomène consomme de l'énergie. Cependant, lorsque ces pertes ne sont pas importantes, on peut raisonnablement supposer que le processus de collision est élastique. Les collisions élastique et parfaitement inélastique sont les cas limites entre lesquels on peut situer les autres formes de collisions. Nous allons nous intéresser exclusivement à ces deux catégories d'interactions.

III.1. Collisions élastiques

Dans une collision élastique entre éléments d'un système isolé, l'énergie cinétique et la quantité de mouvement totales se conservent. Les collisions élastiques se produisent lorsque les forces d'interaction entre les particules impliquées sont conservatives. Dans une telle situation, lorsque les particules entrent en collision, une partie de l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle pour ensuite être restituée sous forme d'énergie cinétique.

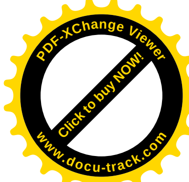
Ici, les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système formé par les particules sont donc vérifiés :

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 \qquad \text{(V.12)}$$

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2 \qquad \text{(V.13)}$$

a. Collision en une dimension

Pour commencer, considérons le cas où les deux objets qui entrent en collision se déplacent sur un axe (Ox). C'est un cas particulier d'une collision plus générale qu'on étudiera ultérieurement. On suppose que le premier objet se déplace initialement à une vitesse $\vec{V}_1 = V_{1x}\vec{i}$ et le second à une vitesse $\vec{V}_2 = V_{2x}\vec{i}$. Après la collision, les deux corps ont respectivement des vitesses $\vec{V}'_1 = V'_{1x}\vec{i}$ et $\vec{V}'_2 = V'_{2x}\vec{i}$. La figure V.4 montre un exemple qui n'est pas unique puisque, comme nous allons le voir plus loin, il existe plusieurs possibilités.

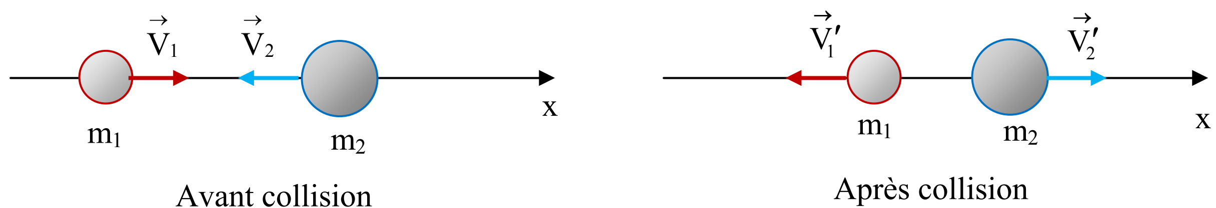


Figure V.4

Le problème est de déterminer précisément V'_{1x} et V'_{2x} en fonction de V_{1x} et V_{2x} et des masses des deux objets. A cet effet nous utiliserons:

- la loi de conservation de la quantité de mouvement qui s'écrit sous la forme scalaire :

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V'_{1x} + m_2 V'_{2x} \qquad \text{(V.14)}$$

- la loi de conservation de l'énergie cinétique qui s'exprime, en fonction des composantes :

$$\frac{1}{2} m_1 V_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2x}^2 = \frac{1}{2} m_1 V'^2_{1x} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2x} \qquad \text{(V.15)}$$

Pour déterminer les deux inconnues V'_{1x} et V'_{2x}, nous avons besoin de réécrire les équations (V.14) et (V.15) sous les formes :

$$m_1 \left(V_{1x} - V'_{1x}\right) = -m_2 \left(V_{2x} - V'_{2x}\right) \qquad \text{(V.16)}$$

$$m_1 \left(V_{1x} + V'_{1x}\right)\left(V_{1x} - V'_{1x}\right) = -m_2 \left(V_{2x} + V'_{2x}\right)\left(V_{2x} - V'_{2x}\right) \qquad \text{(V.17)}$$

La division membre à membre des équations (V.16) et (V.17) donne lieu à :

$$V_{1x} + V'_{1x} = V_{2x} + V'_{2x} \qquad \text{(V.18)}$$

Soit :

$$\underbrace{V_{1x} - V_{2x}}_{\left(V_{1/2}\right)_x} = -\underbrace{\left(V'_{1x} - V'_{2x}\right)}_{\left(V'_{1/2}\right)_x} \qquad \text{(V.19)}$$

Cette équation montre que les modules des vitesses relatives des deux particules (i.e. la vitesse d'une particule par rapport à l'autre) avant et après la collision sont égaux lorsque cette dernière est élastique.

L'équation (V.19) permet d'écrire :

$$V'_{2x} = V_{1x} + V'_{1x} - V_{2x} \qquad \text{(V.20)}$$

Cette relation peut être utilisée pour éliminer V'_{2x} dans (V.16) :

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V'_{1x} + m_2 \left(V_{1x} - V_{2x} + V'_{1x} \right) \qquad (V.21)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\left(m_1 + m_2 \right) V'_{1x} = \left(m_1 - m_2 \right) V_{1x} + 2 m_2 V_{2x} \qquad (V.22)$$

ce qui permet d'écrire

$$V'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1x} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2x} \qquad (V.23)$$

Un calcul similaire donne lieu à la relation :

$$V'_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1x} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2x} \qquad (V.24)$$

Les relations (V.23) et (V.24) sont compliquées pour être interprétées sous cette forme. Nous pouvons cependant les exploiter pour les cas particuliers suivants :

- Cas où les deux corps ont la même masse (figure V.5): $m_1 = m_2 = m$

(V.23) et (V.24) deviennent

$$V'_{1x} = V_{2x} \quad ; \quad V'_{2x} = V_{1x}$$

Ainsi, m_1 communique sa vitesse à m_2 et cette dernière transmet la sienne à m_1.

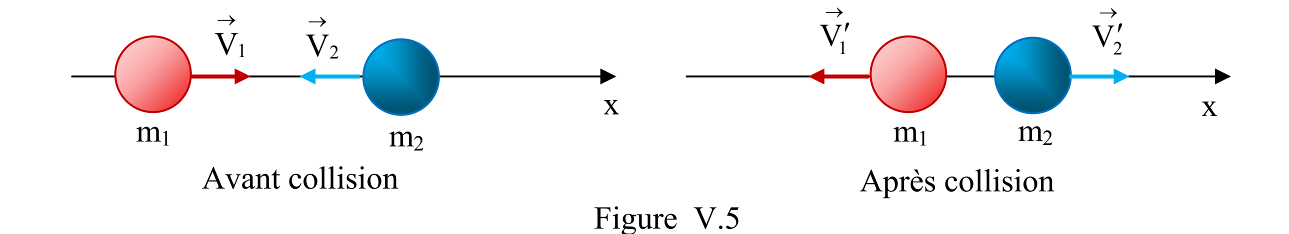


Figure V.5

- Cas où les deux corps ont la même masse et m_2 est initialement au repos : $m_1 = m_2 = m$, $\vec{V}_2 = 0$ (figure V.6).

(V.23) et (V.24) deviennent.

$$V'_{1x} = 0 \quad ; \quad V'_{2x} = V_{1x}$$

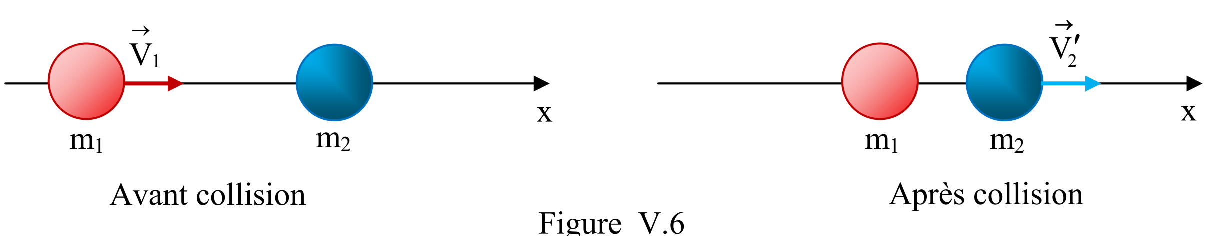


Figure V.6

Ainsi la particule qui était en mouvement s'arrête et celle qui était initialement au repos se met en mouvement avec la vitesse d'incidence de la première.

- Cas où m_2 est au repos $\left(\vec{V}_2 = 0\right)$ et $m_1 >> m_2$ (figure V.7),

$$V_{1x}' \approx V_{1x} \quad ; \quad V_{2x}' \approx 2V_{1x}$$

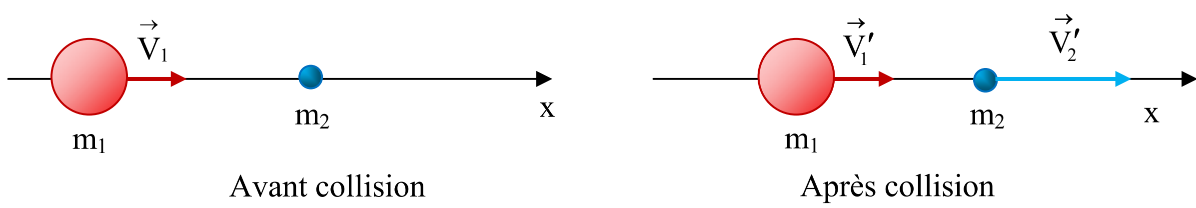


Figure V.7

- Cas où m_2 est au repos $\left(\vec{V}_2 = 0\right)$ et $m_1 << m_2$ (figure V.8),

$$V_{1x}' \approx -V_{1x} \quad ; \quad \left|V_{2x}'\right| << \left|V_{1x}'\right|$$

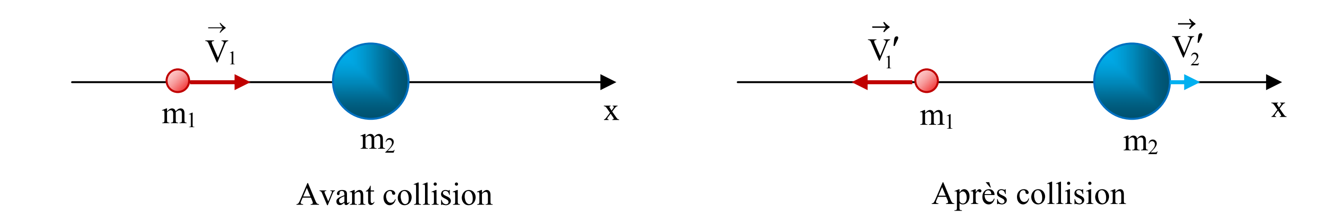
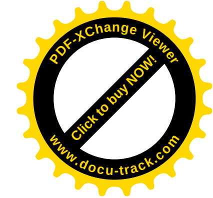


Figure V.8

b. Collision en deux dimensions

Nous allons maintenant généraliser les calculs précédents au cas d'une collision en deux dimensions. Dans ce cas, les particules peuvent avoir des directions différentes avant ou après ou avant et après la collision. Nous devons alors exprimer les vitesses sous la forme vectorielle dans la conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2'$$

Puisqu'il s'agit d'une équation vectorielle, la conservation de la quantité de mouvement vaut pour chaque composante :

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V_{1x}' + m_2 V_{2x}' \quad (V.25)$$
$$m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = m_1 V_{1x}' + m_2 V_{2y}' \quad (V.26)$$

La loi de conservation de l'énergie cinétique est l'équation scalaire :

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 \quad (V.27)$$

Le problème consiste à déterminer les quatre inconnues V_{1x}', V_{1y}', V_{2x}' et V_{2y}', alors que nous ne disposons que des trois équations (V.25), (V.26) et (V.27). En conséquence, pour des conditions initiales (avant le choc) données, il n'y a pas une solution unique pour les composantes des vitesses engendrées par le choc des particules. Il faut donc ajouter des contraintes pour éviter cette situation. Les deux exemples suivants en sont des illustrations.

Exemple 1

C'est un cas classique de contraintes où l'on considère que les deux corps ont la même masse ($m_1 = m_2 = m$) et m_2 est au repos ($\vec{V}_2 = 0$) avant la collision. C'est une situation que l'on rencontre dans les coups de billards et qui est illustrée par la figure V.9

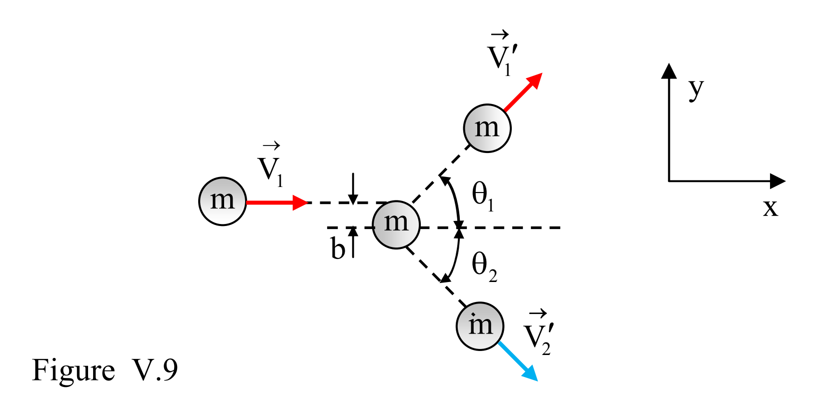


Figure V.9

Les deux objets sont déviés, après la collision, hors de l'axe des « x », comme indiqué sur la figure. L'angle θ_1 que fait la vitesse du premier corps par rapport à la direction initiale de son mouvement est appelé **angle de diffusion**. Cet angle dépend de la force qui agit entre les deux objets, ainsi que de la distance entre la cible et la direction de la vitesse du projectile. Cette distance, notée b, est appelée **paramètre d'impact**. Notons que les mouvements après collision restent dans le plan défini par les positions initiales.

Compte tenu des contraintes imposées ($m_1 = m_2 = m$, $\vec{V}_2 = 0$), la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\vec{V}_1 = m\vec{V}_1' + m\vec{V}_2'$$

En élevant au carré les deux membres de cette équation on obtient, après simplification par m,

$$V_1^2 = V_1'^2 + 2\vec{V}_1' \cdot \vec{V}_2' + V_2'^2 \qquad (V.28)$$

Par ailleurs, après simplification par 2/m, l'équation de conservation de l'énergie cinétique donne lieu à :

$$V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \qquad (V.29)$$

La comparaison de (V.28) et (V.29) permet de conclure que :

$$\vec{V}_1' \cdot \vec{V}_2' = 0 \qquad (V.30)$$

Ce qui veut dire que les trajectoires finales sont perpendiculaires.

Exemple 2 :

Considérons le cas de deux balles de billard de même masse qui se déplacent le long d'un axe (Ox). La première, m_1, se déplace vers la droite avec une vitesse V_1=10 m/s et la seconde, m_2, se déplace vers la gauche avec une vitesse V_2 =5 m/s. Après la collision, supposée élastique, l'une des deux balles prend la direction de l'axe (Oy) (figure V.10 ci-dessous). Il s'agit de déterminer les vitesses des deux balles après la collision.

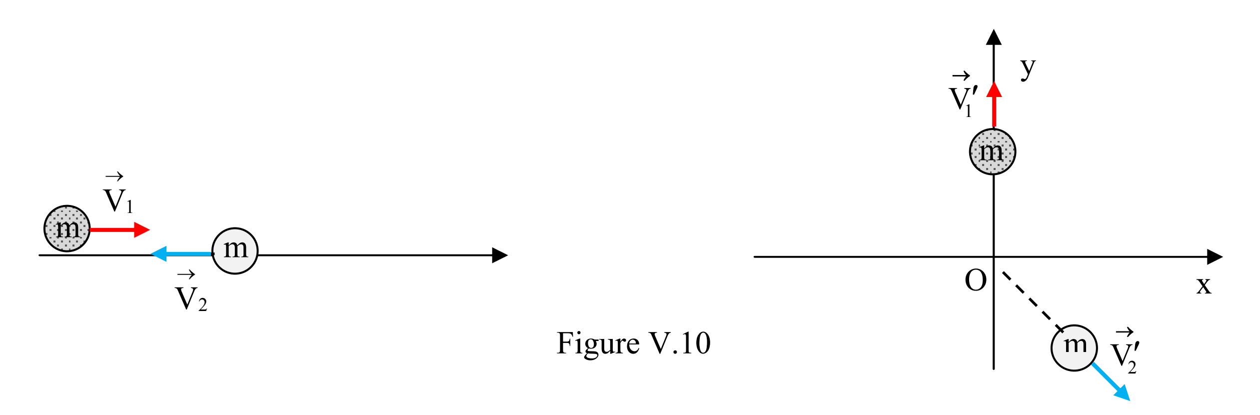
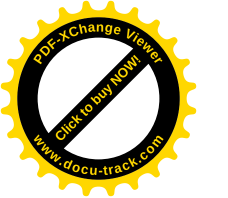


Figure V.10

La loi de conservation de la quantité de mouvement nous permet d'écrire :

$$m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = m\vec{V}_1' + m\vec{V}_2'$$

La projection de cette équation sur les axes donne, après simplification par la masse m :





$$V_{1x} + V_{2x} = V'_{1x} + V'_{2x} \qquad (V.31)$$

$$V_{1y} + V_{2y} = V'_{1y} + V'_{2y} \qquad (V.32)$$

Remplaçons les vitesses connues par leurs valeurs :

$$10 - 5 = 0 + V'_{2x} \quad \Rightarrow V'_{2x} = 5\,\mathrm{m/s}$$

$$0 + 0 = V'_{1y} + V'_{2y} \quad \Rightarrow V'_{1y} = -V'_{2y}$$

La collision étant élastique, nous pouvons utiliser la loi de conservation de l'énergie cinétique:

$$\frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 = \frac{1}{2}mV_1'^2 + \frac{1}{2}mV_2'^2 \qquad (V.33)$$

qui s'écrit, en fonction des composantes :

$$\frac{1}{2}m\left(V_{1x}^2 + V_{1y}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(V_{2x}^2 + V_{2y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(V_{1x}'^2 + V_{1y}'^2\right) + \frac{1}{2}m\left(V_{2x}'^2 + V_{2y}'^2\right) \qquad (V.34)$$

Après simplification et remplacement des grandeurs connues par leurs valeurs, on obtient:

$$(10)^2 + (-5)^2 = V_{1y}'^2 + \left(25 + V_{2y}'^2\right)$$

Comme

$$V'_{1y} = -V'_{2y}$$

il vient

$$2V_{1y}'^2 = 2V_{2y}'^2 = 100\ \mathrm{m^2/s^2}$$

soit

$$V'_{1y} = \sqrt{50}\ \mathrm{m/s} \quad \text{et} \quad V'_{2y} = -\sqrt{50}\ \mathrm{m/s}$$

III.2. Collisions parfaitement inélastiques (ou chocs mous)

Rappelons que lorsque l'énergie cinétique totale du système n'est pas conservée après une collision, on dit que cette dernière est inélastique même si la quantité de mouvement totale ne change pas. Nous allons nous intéresser au cas des collisions parfaitement inélastiques dans lesquelles les deux particules ont une vitesse commune après l'interaction en restant collées l'une à l'autre. En conséquence, le principe de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{V} \qquad (V.35)$$



La vitesse commune après collision est alors

$$\vec{V} = \frac{m_1\,\vec{V}_1 + m_2\,\vec{V}_2}{m_1 + m_2} \qquad (V.36)$$

Exemple

Un patineur de masse $m_1 = 75\,kg$, se dirigeant vers l'est avec une vitesse $V_1 = 5\,m/s$, entre en collision avec un autre patineur de masse $m_2 = 50\,kg$, glissant vers le nord avec une vitesse $V_2 = 10\,m/s$. Les deux patineurs restent accrochés l'un à l'autre après la collision qui leur confère un mouvement rectiligne (figure V.11). On se propose de calculer la vitesse commune après la collision

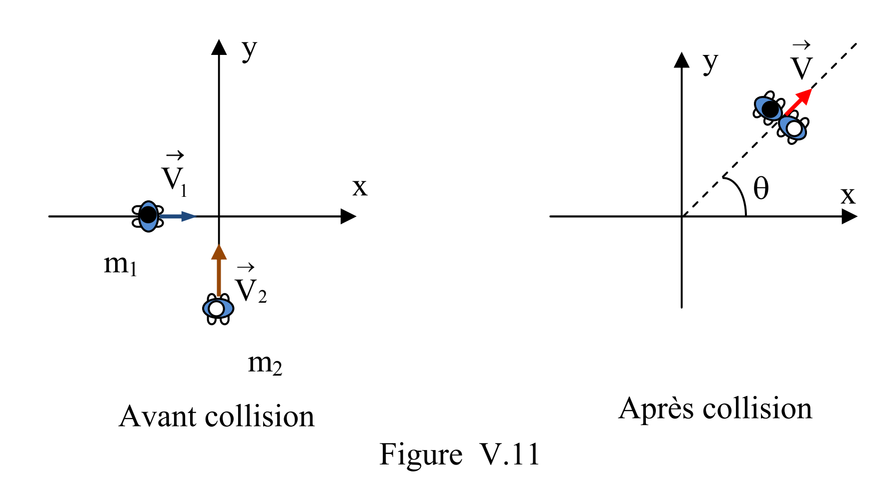


Figure V.11

Le frottement des patins sur la glace étant négligeable, le système composé par les deux patineurs peut être considéré isolé; l'application du principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire

$$m_1\,\vec{V}_1 + m_2\,\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{V}$$

Soit

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = (m_1 + m_2)\,V_x = (m_1 + m_2)\,V\cos\theta \qquad (V.37)$$

$$m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = (m_1 + m_2)\,V_y = (m_1 + m_2)\,V\sin\theta \qquad (V.38)$$

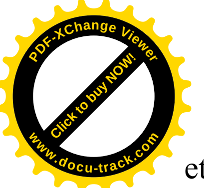
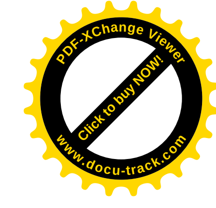
Remplaçons les grandeurs connues par leurs valeurs :

$$75\cdot 5 + 0 = 125\cdot V\cdot\cos\theta \qquad (V.39)$$

$$0 + 50\cdot 10 = 125\cdot V\cdot\sin\theta \qquad (V.40)$$

Le rapport de (V.40) sur (V.39) donne lieu à

$$tg\theta = 1{,}3333 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 53{,}13°$$

et (V.40) permet d'obtenir la valeur du module V en écrivant :

$$V = \frac{500}{125 \cdot \sin\theta} = 5 \text{ m/s}$$

Calculons les énergies cinétiques avant et après la collision :

$$\text{Avant collision : } E_C = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = 3437{,}5\,\text{J}$$

$$\text{Après collision : } E'_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = 1562{,}5\,\text{J}$$

Ainsi, un peu moins de la moitié de l'énergie cinétique initiale a été convertie en d'autres formes d'énergies.

IV. MOUVEMENT D'UN SYSTEME DE PARTICULES

Les trois lois de Newton que nous avons vues s'appliquent au sens strict à un point matériel seulement. Il est important de comprendre comment les lois de Newton peuvent être formulées afin de les appliquer à des systèmes de points matériels.

IV.1. Le centre de masse

Soit un système formé de *n* particules de masses $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_n$, repérées par leurs vecteurs positions respectifs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n$ définis dans un référentiel fixe.

Définition : Nous appelons **centre de masse** un point auquel nous pouvons rattacher toute la masse M du système et dont le vecteur position est donné par

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \cdots\cdots + m_n \vec{r}_n}{M} \qquad (V.41)$$

Les vecteurs positions peuvent être exprimés en fonction des coordonnées :

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots\cdots + m_n x_n}{M} \qquad (V.42)$$




$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots\cdots + m_n y_n}{M} \quad (V.43)$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots\cdots + m_n z_n}{M} \quad (V.44)$$

IV.2. Vitesse et accélération du centre de masse

La vitesse du centre de masse, notée $\vec{V}_{cm}$, s'obtient simplement en calculant la dérivée de $\vec{r}_{cm}$ par rapport au temps

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left\{ m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \cdots\cdots + m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right\} \quad (V.45)$$

soit

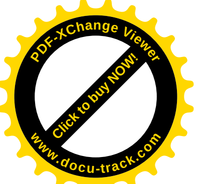
$$\vec{V}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + m_3 \vec{V}_3 + \cdots\cdots + m_n \vec{V}_n}{M} \quad (V.46)$$

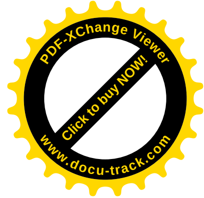
De même, l'accélération du centre de masse, notée $\vec{a}_{cm}$, s'écrit

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left\{ m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{V}_3}{dt} + \cdots\cdots + m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} \right\} \quad (V.47)$$

soit

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \cdots\cdots + m_n \vec{a}_n}{M} \quad (V.48)$$





IV.3. La deuxième loi de Newton pour un système de particules

Ainsi la quantité de mouvement totale du système s'exprime comme étant le produit de la masse totale M par la vitesse du centre de masse :

$$\vec{\mathcal{P}}_t = M\vec{V}_{cm} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + m_3\vec{V}_3 + \cdots\cdots + m_n\vec{V}_n$$
$$= \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2 + \vec{\mathcal{P}}_3 + \cdots\cdots + \vec{\mathcal{P}}_n \qquad (V.49)$$

Alors, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale est

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}_t}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}_1}{dt} + \frac{d\vec{\mathcal{P}}_2}{dt} + \frac{d\vec{\mathcal{P}}_3}{dt} + \cdots\cdots + \frac{d\vec{\mathcal{P}}_n}{dt} \qquad (V.50))$$

Si $\vec{F}_i$ est la force résultante exercée sur la particule i, la deuxième loi de Newton permet d'écrire

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{\mathcal{P}}_i}{dt} \qquad (V.51)$$

La relation (V.50) peut se mettre sous la forme

$$\vec{F}_t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n \qquad (V.52)$$

où $\vec{F}_t$ représente la force totale (ou la résultante) exercée sur le système.

La deuxième loi de Newton s'applique donc au mouvement du centre de masse, à condition de considérer la résultante de toutes les forces appliquées :

$$\vec{F}_t = M\,\vec{a}_{cm} \qquad (V.53)$$

Remarquons que la force $\vec{F}_i$ s'exerçant sur la particule i se compose de la résultante des forces externes $\vec{F}_i^{ext}$, exercées par l'environnement extérieur au système, et la résultante des forces internes $\vec{F}_i^{int}$, qui est la somme des forces exercées par toutes les autres particules du système :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} \qquad (V.54)$$

Comme

$$\vec{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j/i} \qquad (V.55)$$

où $\vec{F}_{j/i}$ est la force exercée par la particule j sur la particule i, et que la troisième loi de Newton stipule que $\vec{F}_{j/i} = -\vec{F}_{i/j}$, la résultante de toutes les forces appliquées sur le système s'écrit alors

$$\vec{F}_t = \sum_i \left(\vec{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j/i}}_{0} \right) = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \qquad (V.56)$$

Pour comprendre ce calcul, considérons le cas de trois particules, numérotées 1,2 et 3. Les forces agissant sur chacune des trois particules sont :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1} \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{3/2} \\ \vec{F}_3 &= \vec{F}_3^{ext} + \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} \end{aligned} \qquad (V.57)$$

En faisant la somme de ces trois forces, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_3^{ext} + \underbrace{\vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2}}_{0} + \underbrace{\vec{F}_{3/1} + \vec{F}_{1/3}}_{0} + \underbrace{\vec{F}_{3/2} + \vec{F}_{2/3}}_{0} \\ &= \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_3^{ext} \end{aligned} \qquad (V.58)$$

Ceci signifie que, pour connaître le mouvement du centre de masse, il n'est pas nécessaire de connaître les détails des forces internes au système, mais uniquement les forces externes.

Complément : considérons l'exemple (Figure V.12) du mouvement d'un obus.

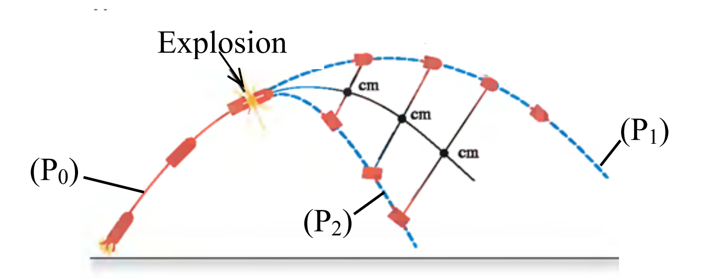


Figure V.12

Si l'obus reste en un seul morceau, sa trajectoire, (P_0), est celle, parabolique, prévue par la théorie du mouvement d'un projectile. Si, l'obus explose en l'air en deux morceaux, le premier suivrait une trajectoire parabolique, (P_1), et le second se déplacerait sur une autre parabole (P_2). Les trois paraboles (P_0), (P_1) et (P_2) se superposent jusqu'au point où l'explosion a lieu pour ensuite se séparer (Figure V.12) . De son coté, le centre de masse des deux morceaux poursuivrait sa trajectoire sur (P_0), au-delà de ce point.